INTRODUZIONE

Perché un altro testo di Fisica? Perché questo è un testo gratuito, naturalmente. Perché è aperto, quindi modificabile secondo le esigenze di chi lo usa. Ma non solo per queste, che pure sarebbero da sole ragioni sufficienti.

Il testo non si distingue per una particolare, o innovativa, prospettiva pedagogica. Anzi, si può dire che ricalca più o meno da vicino la maggior parte dei testi di Fisica disponibili sul mercato.

Il fatto è che che questo testo è ospitato da un sito che propone un corso di Matematica contraddistinto, esso sì, da una prospettiva pedagogica del tutto innovativa. Il corso di Fisica che proponiamo, in altre parole, è pensato in modo da integrarsi con quello parallelo di Matematica.

La maggior parte dei testi di Fisica, per non dire di quelli di Scienze, deve misurarsi con difficoltà che derivano, in primo luogo, dall'impostazione tradizionale dei corsi di Matematica che vengono proposti nei bienni delle nostre scuole secondarie di secondo grado. Tale impostazione si caratterizza per alcuni aspetti a nostro giudizio controproducenti per quanto riguarda il contemporaneo (o appena successivo) insegnamento della Fisica e delle Scienze. Citiamo in primo luogo:

- l'approccio alla geometria;
- l'introduzione dei numeri reali;
- l'introduzione alla statistica e alla probabilità;
- l'approccio al concetto di equazione;
- l'introduzione del concetto di funzione;
- l'avvio alla riflessione sulla continuità;
- l'avvio alle idee e alle prime tecniche dell'analisi.

Risulta evidente che molti testi di scienze sperimentali si scontrano con la mancanza di alcuni prerequisiti di fondo, quasi sempre riconducibili ai temi che abbiamo citato in precedenza. Altrettanto evidente risulta quanto i temi di cui sopra siano strettamente e profondamente tra loro intrecciati. I testi di scienze non possono che risolvere il problema in modo per così dire autarchico, ospitando occasionali paragrafi, o addirittura interi capitoli, in cui si parla della "Matematica che occorre sapere per comprendere quanto stiamo per dirvi...".Tutti conosciamo per diretta esperienza la quantità di sotterfugi, approssimazioni, banalizzazioni cui si va forzatamente incontro per questa strada. Per non parlare dei veri e propri conflitti di idee che si vengono a creare, quando uno stesso concetto sembra presentare aspetti diversi e inconciliabili tra il modo di presentazione visto nel corso di Matematica e quello visto nel corso di Fisica.

1. L'approccio alla geometria

La tradizione vuole che la geometria venga insegnata, a livello di primo anno del biennio, nel solco di una tradizione modellata sul primo libro degli Elementi di Euclide. Per quanto riguarda il secondo anno, in gran parte dedicato al tema della proporzionalità, il riferimento più o meno esplicito è fatto al quinto libro degli stessi Elementi.

Lasciamo da parte l'ovvia considerazione che Euclide si proponeva di assiomatizzare (riuscendoci solo in parte!) un corpo di conoscenze solido, in buona parte ereditato da una tradizione a lui precedente. Per quale motivo uno studente di quattordici anni dovrebbe sentire l'esigenza di assiomatizzare un corpo di conoscenze che possiede in modo frammentario ed incerto? Senza contare che l'età dello studente è del tutto inadatta a comprendere a fondo l'idea stessa di assiomatizzazione.

Ma c'è di più. Euclide stesso non riesce ad essere sempre integralmente fedele al suo proposito di assiomatizzazione. Talvolta (si veda per esempio la "dimostrazione" del primo criterio di congruenza dei triangoli) lascia entrare nel discorso argomentazioni di carattere per così dire fisico, in qualche modo assumendo come ovvie e naturali certe proprietà dello spazio che si sta proponendo di descrivere. Chi di noi, allevati nel solco di questa tradizione, non ricorda il senso di sgomento provato quando, per la prima volta, ci siamo resi conto che nulla vieta l'esistenza di spazi che hanno proprietà diverse da quelli descritti da Euclide? Un insegnante di Fisica deve sentire l'esigenza, morale ancor prima che didattica, di far capire anche agli studenti più giovani che tali spazi non solo possono esistere, ma esistono per davvero.

Meglio dunque un approccio alla geometria che da subito dichiari alcuni fatti essenziali:

a) fare geometria (e matematica in genere) significa porsi il problema di costruire modelli adatti alla descrizione di situazioni reali;
b) situazioni diverse richiedono l'uso di modelli diversi;
c) la geometria di Euclide è uno tra i modelli possibili, non certo il solo.

Ma c'è altro ancora. L'approccio del primo libro degli Elementi lascia fuori, o tutt'al più relegati sullo sfondo, alcuni concetti che sono centrali in un corso di scienze sperimentali. Citiamo in ordine sparso: distanze, direzioni, funzioni che hanno come input una direzione, vettori. Ad ognuno di questi concetti corrisponde un inserto ad hoc dal relativo libro di testo, con tutti i difetti che abbiamo detto. Meglio dunque un approccio alla geometria in cui questi concetti entrino da subito come oggetti fondanti. Meglio quindi definire la lunghezza di un segmento non come classe di equivalenza di segmenti ad esso congruenti, bensì come funzione che ha come input le coordinate dei due estremi, come output un numero reale opportunamente definito.

Inutile aggiungere che il corso parallelo di Matematica risponde, punto per punto, alle esigenze che abbiamo elencato.

2. L'introduzione dei numeri reali

Le scienze sperimentali si occupano di grandezze, cioè di quantità misurabili. Misurare una grandezza significa confrontarla con un campione scelto come riferimento. Il confronto ci porta a costruire una prima successione di cifre, che termina quando un'ulteriore ripetizione del campione ci porterebbe a superare la grandezza misurata. Se le cose finissero qui ci basterebbero i numeri naturali per descrivere il risultato del processo di misura: il numero intero che abbiamo costruito è un'approssimazione per difetto della misura. Così non è naturalmente: mettiamo un punto dopo la prima sequenza di cifre, e ci poniamo il problema di misurare la parte che rimane usando un sottomultiplo del campione, e la parte che ulteriormente rimane con un sottomultiplo ancora più piccolo, e così via. Il "così via", nella realtà dei fatti, si arresta presto: è difficile trovare esempi di grandezze che siano misurabili con più di una dozzina di cifre significative. Ma, per ragioni puramente teoriche, è utile servirsi di un modello nel quale il processo non si arresta: ad ogni ripetizione del confronto otteniamo una cifra in più, e la sequenza di cifre che otteniamo dopo il punto diventa una successione ininterrotta. Non solo: non abbiamo alcuna ragione per supporre che la sequenza che otteniamo debba presentare una caratteristica straordinaria come la periodicità. Perché mai le cifre dovrebbero ripresentarsi sempre nello stesso ordine?

L'oggetto matematico che costruiamo in questo modo si chiama numero reale. Per giunta, se la sequenza non è periodica, stiamo parlando di un numero irrazionale. Questo è un modo tra i tanti per introdurre i numeri reali. Se gli allievi sono quattordicenni è probabilmente l'unico sensato: tagli e classi contigue sono fuori discussione.

Naturalmente è proprio questo il modo di introdurre i reali scelto nel parallelo corso di Matematica.

Non solo, dal corso di Matematica gli studenti sono abituati al fatto che per operare con i numeri reali non posso fare altro che operare su una loro approssimazione, cioè su un intervallo di indeterminazione. Per calcolare quanto fa $\sqrt{3}/\sqrt{2}$ debbo chiedermi in quale intervallo di indeterminazione cade il risultato che ottengo dividendo un numero che sta tra 1.7 e 1.8 per un numero che sta tra 1.4 e 1.5. Questo è un problema genuinamente matematico, e per giunta facile da risolvere, purché il corso di Matematica si faccia carico della soluzione.

Fatto ciò, diventano inutili i capitoli che i libri di scienze sperimentali dedicano al problema di come si propaga l'incertezza di una misura quando si fanno operazioni che coinvolgono i risultati delle misure. O meglio: strategie quali "per calcolare l'incertezza relativa in un prodotto si sommano le incertezze relative dei fattori" diventano strumenti che servono a rendere il calcolo più rapido, non a comprenderne l'idea di fondo.

3. L'introduzione alla statistica e alla probabilità

Nel punto precedente abbiamo volutamente parlato di "incertezza", non di "errore" nella misura. Eppure la maggior parte dei libri di testo usa il termine errore. Pura questione terminologica? A noi non pare: l'uso di un termine oppure dell'altro convoglia idee diverse nella mente di un giovane studente, un termine mi fa pensare a qualche cosa che non so, l'altro a qualche cosa che ho sbagliato, e non si tratta di una differenza da poco.

Se voglio calcolare $\sqrt{3}$ uso un algoritmo che calcola quadrati, e discrimina tra quadrati che superano oppure no il valore 3. Se ho poca pazienza scopro che $\sqrt{3}$ sta tra 1 e 2: posso anche dire che $\sqrt{3}=1.5\pm0.5$. Naturalmente non avrebbe senso dire che il termine 0.5 è l'errore assoluto: caso mai diciamo che 0.5 è la semi-ampiezza dell'intervallo di indeterminazione in cui $\sqrt{3}$ cade, intervallo che ha 1.5 come valore medio. Se ho più pazienza scopro che $\sqrt{3}$ cade tra 1.7 e 1.8, cioè che $\sqrt{3}=1.75\pm0.05$: una maggior pazienza mi ha permesso di restringere di 10 volte l'intervallo di indeterminazione. Se itero l'algoritmo posso restringere l'intervallo tanto quanto voglio.

Se misuro la lunghezza L del banco usando un segnalibro S posso scoprire che la lunghezza del banco è compresa tra 7 e 8 segnalibri: se voglio scrivo che $L=7.5\pm0.5S$. Ha senso dire che 0.5S è l'incertezza assoluta della misura e 0.5/7.5 è l'incertezza relativa. Ha poco senso parlare invece di errore assoluto e errore relativo. Se voglio posso ridurre l'incertezza: basta considerare come unità S/10, e usarla per misurare il pezzo di banco che avanza. In questo caso, però, non posso materialmente portare avanti questo metodo tanto quanto voglio: prima o poi mi devo fermare, quindi non posso restringere più l'intervallo di indeterminazione. Continuiamo a credere che il risultato della misura sia un qualche numero reale, ma dal punto di vista pratico dobbiamo fermarci a un intervallo di indeterminazione di larghezza maggiore di zero.

C'è poi una questione ancora più delicata. Appurato che ogni misura fornisce come risultato un intervallo di indeterminazione, come ci regoliamo sul dove collocare il numero reale che stiamo cercando? Riteniamo che possa cadere con la stessa probabilità in ciascuno dei sotto-intervalli di uguale ampiezza in cui posso dividere l'intervallo di indeterminazione? Oppure certi sotto-intervalli sono candidati più plausibili di altri?

Ci stiamo ponendo cioè il problema di come affrontare una situazione di genuina incertezza, che richiede la preventiva messa a punto di solidi strumenti di pensiero statistico e probabilistico. I libri di scienze sperimentali affrontano il problema con un capitoletto in cui condensare di tutto un po': definizioni più o meno efficaci del concetto di probabilità, istogrammi di distribuzione, indici di posizione, indici di dispersione e altro ancora.

Occorre ben altro, naturalmente. Occorre un corso di Matematica che si faccia carico del problema nella sua interezza. Che, prima di tutto, spieghi come fare probabilità significa occuparsi di eventi aleatori, associando ad ogni evento un numero in modo che tale associazione soddisfi alcune ragionevoli proprietà.

Sarà facile allora spiegare che: fare una misura significa realizzare una variabile aleatoria, della quale vogliamo conoscere la legge di distribuzione. Se lavoriamo a bassa sensibilità, come quando misuriamo in segnalibri la lunghezza del banco, ripetere la misura riproduce ogni volta lo stesso risultato. Non possiamo quindi fare altro che assumere una distribuzione uniforme sull'intervallo (7,8). Se lavoriamo ad alta sensibilità, usando per esempio metodi interferometrici per misurare lunghezze, ripetendo la misura otteniamo risultati diversi. Possiamo quindi porci il problema di come è fatta la legge di distribuzione, ed in particolare di valutarne il valore medio e gli opportuni indici di distribuzione.

4. L'approccio al concetto di equazione

Buona parte di un testo di Fisica è dedicata allo stabilire leggi che regolano lo svolgersi dei fenomeni naturali. Tali leggi prendono il più delle volte la forma di equazioni o disequazioni. Una parte quasi altrettanto consistente del testo è dedicata agli esercizi, che spesso impongono di risolvere equazioni o disequazioni.

Occorre dunque che il corso di Matematica dedichi a questo tema il giusto spazio, pena il proliferare, nei libri di scienze sperimentali, di fantasiosi capitoli ad hoc.

A proposito dei modi in cui certi testi propongono di risolvere una particolare classe di problemi, un discorso a parte meritano senza alcun dubbio le proporzioni. Un esempio, paradossale ma autentico: voglio convertire 110 yard in metri, sapendo che 1 yard = 0.9411 m. La soluzione proposta consiste naturalmente nell'impostare un'opportuna proporzione:

$$1 : 0.9144 = 110 : x$$

dove x indica il numero di metri che corrispondono a 100 yard. A questo punto è sufficiente: a) intuire il significato degli strani termini "sta a" e "come" che compaiono nell'enunciato, b) sperare di aver scritto i quattro termini nell'ordine giusto, c) ricordarsi che il prodotto dei medi è magicamente uguale a quello degli estremi, per scoprire finalmente che x si ottiene moltiplicando le 110 yard per il fattore di conversione 0.9144 metri/yard.

Sembra uno scherzo, ma è purtroppo così che le cose vanno in molti casi. Perché stupirsene, d'altra parte, quando si consideri che le proporzioni sono uno dei pochi argomenti davvero condivisi da tutti gli studenti in uscita dalla scuola secondaria di primo grado?

Né d'altra parte aiutano a fare un po' di chiarezza le stesse indicazioni nazionali per le scuole di secondo grado. In quelle del Liceo Classico, relative al primo biennio, si legge ad esempio che lo studente "saprà studiare le soluzioni delle equazioni di primo grado in una incognita, delle disequazioni associate e dei sistemi di equazioni lineari in due incognite". Un'equazione come x^2+3=5 è quindi riservata al secondo biennio, per ragioni che non è facile comprendere.

Che il problema delle proporzioni non sia affatto un problema di poco conto è confermato perfino da ciò che lo studente incontra *dopo* la scuola secondaria. Nei test di ammissione a Medicina, anno 2014, spiccano quesiti di questa natura: "Quale tra le coppie di termini proposti completa logicamente la seguente proporzione verbale *x : teorico = concreto : y* ?". Seguono naturalmente coppie di termini tra le quali scegliere. La domanda, riformulata in termini adatti ad un primo biennio, chiede di risolvere la seguente "proporzione verbale" *Paperone : ricchezza = Paperino : x,* la cui soluzione è povertà, purché si convenga di interpretare il simbolo ":" come "è un esempio di", e il simbolo "=" come "allo stesso modo in cui".

Che cosa resti dell'antica e nobile teoria delle proporzioni di Eudosso è un problema che forse sarà il caso, prima o poi, di prendere in considerazione.

5. L'introduzione del concetto di funzione

Gli esercizi contenuti in un testo di scienze sperimentali richiedono insomma che lo studente abbia già, o stia maturando nel frattempo, una certa esperienza nel risolvere equazioni della più varia natura, per esempio x^2+3=5, oppure sin(x)=0.8, oppure ancora 1/(x^2-7)=0.01, o magari 10^x=87.

E' perciò fondamentale che gli studenti abbiano ben consolidato il concetto di funzione e sappiano far riferimento a vari modi di esprimerlo: rappresentazioni tabulari, grafiche, algebriche. Devono essere consapevoli del fatto che una formula può essere trasformata esprimendo una variabile in funzione di altre, facendo riferimento in modo spontaneo al concetto di funzione inversa. Ciò consentirà, una volta per tutte, di liberarsi dal problema delle "formule inverse", che in molti libri di scienze viene ancora affrontato in modi estemporanei, primo fra tutti la loro memorizzazione in parallelo alla memorizzazione della "formula diretta".

6. L'avvio alla riflessione sulla continuità

Il consolidamento di una corretta ed efficace riflessione sul concetto di funzione è certamente agevolato dall'uso di un sistema di acquisizione dati, cui si fa largo riferimento nella prima parte di questo corso, soprattutto per quanto riguarda le misure di posizione fatte con l'utilizzo di un sonar.

Il sistema di acquisizione, infatti, fornisce in modo naturale esempi di funzioni dell'input tempo che possiamo rappresentare sia sotto forma di tabelle di valori, sia di grafici. Non solo: il sistema fornisce gli output in corrispondenza di un insieme discreto di input, più o meno fitti a seconda della frequenza di acquisizione che impostiamo per il sensore utilizzato. Si pone quindi un problema di fondo: come variano i valori dell'output tra una qualsiasi misura e quella successiva? Il grafico, se aggiungiamo sempre nuovi punti, presenterà dei gradini come quelli che si osservano nel grafico della funzione floor? E' più ragionevole immaginare che, aumentando la frequenza di acquisizione, sia possibile in linea di principio trovare tutti i valori compresi tra due output successivi. E' cioè ragionevole immaginare che ad un progressivo e illimitato infittirsi dell'input tempo corrisponda un progressivo e illimitato infittirsi degli output relativi. In questo contesto risulta perciò naturale proporre un approccio alla continuità formulato in termini di continuità uniforme: è proprio questo l'approccio proposto nel parallelo corso di matematica.

Il sistema di acquisizione, inoltre, fornisce ricche serie di dati, per giunta in modo rapido e semplice. Da un lato ciò ne costituisce un limite, perché l'immediatezza d'uso porta a sacrificare tutto un repertorio di tecniche sperimentali che sono certamente interessanti e formative. D'altra parte, e ciò è vero soprattutto per le scuole con un ridotto numero di ore dedicato alle scienze sperimentali, il tempo così risparmiato può essere dedicato ad attività forse altrettanto interessanti: ad esempio una riflessione, magari supportata da opportuni strumenti di calcolo, su quali possano essere le funzioni continue più semplici che permettono di approssimare le serie discrete che abbiamo acquisito.

7. L' avvio alle idee e alle prime tecniche dell'analisi

Le funzioni continue con cui approssimiamo i dati acquisiti presenteranno un grafico regolare e privo di buchi. Verrà quindi spontaneo descrivere crescenza, decrescenza e stazionarietà di tali funzioni, in termini di pendenza della tangente al relativo grafico. Quando poi si pone il problema di valutare l'effetto complessivo che una grandezza produce nel tempo, come per esempio quando vogliamo valutare l'impulso esercitato da una forza che cambia da un istante all'altro, sarà naturale ragionare in termini di area compresa tra il grafico della funzione e l'asse dei tempi. E' quindi necessario poter contare sull'appoggio di un corso di matematica che affronti questi temi in modo precoce ed efficace, legandoli a contesti diversi e mettendo a punto le tecniche di base che ne consentano un utilizzo disinvolto. I due corsi ne risulteranno reciprocamente rafforzati, e d'altra parte è quasi impossibile immaginare come essi possano, viceversa, marciare su binari separati.

E' quasi ovvia l'osservazione che l'area compresa sotto il grafico della velocità in funzione del tempo, tra due istanti prescelti, rappresenta la variazione di posizione che il corpo in moto ha subito nel frattempo. E' altrettanto naturale l'osservazione che la pendenza della tangente al grafico della posizione rappresenta la velocità del corpo in quell'istante. Queste due osservazioni, prese insieme, costituiscono forse la migliore introduzione alla formula fondamentale del calcolo. Per le scuole in cui è limitato il numero di ore dedicate all'area scientifica, questa introduzione potrà efficacemente sostituire un'impossibile dimostrazione formale.