Il sistema di posizionamento globale GPS

Si tratta, come dice il nome, di un sistema che permette di misurare con estrema precisione la posizione in cui si trovano gli oggetti: può fornire, per esempio, latitudine, longitudine e quota per un aereo in volo attraverso l'Atlantico, o per un'automobile lungo una strada che attraversa un valico alpino. Vedremo come, per misurare la posizione, sia necessario misurare il tempo.

La sigla GPS deriva dal fatto che il nome inglese del sistema è Global Positioning System. Sviluppato dal Dipartimento della Difesa degli Stati Uniti, all'inizio il sistema era destinato esclusivamente ad usi militari. Oggi, aperto ad usi civili e commerciali, è diventato molto comune come accessorio in dotazione alle automobili. Esistono modelli palmari, grandi come un telefono cellulare, che possiamo portare in tasca durante un'escursione in montagna, oppure montare sul manubrio della bicicletta. Molti smartphones montano al loro interno un ricevitore GPS.
Il principio su cui si basa è davvero semplice, almeno nelle sue linee generali: si tratta di misurare la distanza del punto in cui ci troviamo rispetto a tre punti di cui siano note le posizioni.

Per capire come la cosa funzioni vediamo un modello in due dimensioni soltanto (►fig.2.app.1): in dimensione due ci occorrono due numeri per specificare la posizione, dunque bastano le distanze rispetto a due punti la cui posizione è nota.

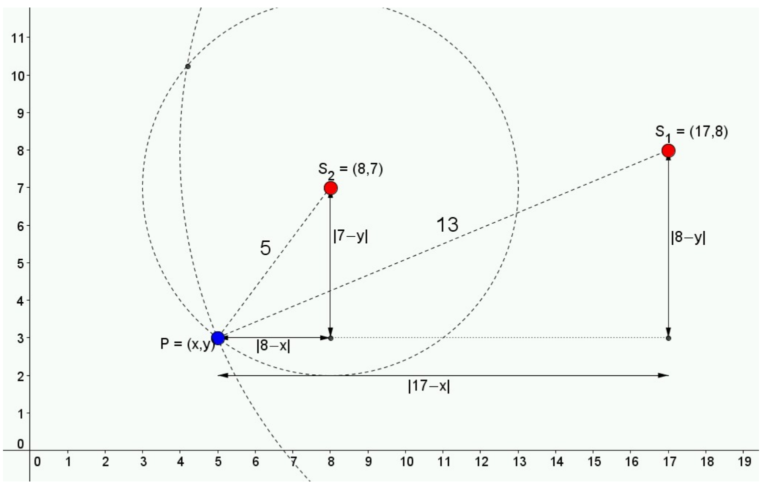

Fig.2.app.1 un modello bidimensionale

Vogliamo conoscere le coordinate del punto P: le abbiamo indicate con x e y. Abbiamo 2 punti di riferimento: S_1 di coordinate (17,8) e S_2 di coordinate (8,7). Se sappiamo che P si trova a distanza 13 da S_1 e a distanza 5 da S_2 (vedremo tra un attimo come si fa a saperlo), allora le coordinate di P soddisfano le due equazioni:

$$(17 - x)^2 + (8 - y)^2 = 13^2$$
$$(8 - x)^2 + (7 - y)^2 = 5^2$$

Si tratta di risolvere due equazioni simultaneamente (in altri termini: bisogna risolvere il sistema formato dalle due equazioni). Non ci interessa, in questo momento, discutere di come si risolve il sistema: per ora verificate che una soluzione del sistema è $x = 5, y = 3$. Il punto P occupa dunque la posizione (5,3). C'è anche una seconda soluzione, di coordinate circa (4.2,10.2), ma non la consideriamo perché si trova *più in alto* di S_1 e di S_2, e vedremo tra un attimo che nella realtà questo non è possibile, perché S_1 e S_2 sono le posizioni in cui si trovano due satelliti artificiali!

Se dobbiamo determinare la posizione di un aereo in volo abbiamo bisogno di tre numeri: per esempio latitudine, longitudine, quota. Dobbiamo dunque, per poter applicare lo stesso metodo, misurarne la distanza rispetto a tre punti di cui sia nota la posizione.

I tre punti, come abbiamo detto, sono satelliti in orbita intorno alla terra. Il sistema GPS utilizza come punti di riferimento 32 satelliti che orbitano ad una quota di circa 20200 km, percorrendo un'orbita in circa 12 ore. I satelliti sono disposti in modo tale che da ogni punto della terra siano visibili in ogni momento almeno quattro di essi (in realtà, in qualunque punto della terra vi troviate, vedete sempre un numero di satelliti più grande, ma quattro, come vedremo, è il numero minimo). Ciascun satellite invia in continuazione un segnale che contiene due informazioni: in che momento il segnale è stato emesso, dove si trova il satellite nel momento dell'emissione.

Il ricevitore montato sull'aereo riceve in un certo istante tre segnali. Tutti e tre hanno viaggiato alla stessa velocità, quella della luce! La velocità della luce, come sappiamo dalla lezione 1, è di 299792458 m/s: d'ora in avanti useremo l'approssimazione $c = 3.0\cdot10^8$ m/s. Il ricevitore monta al suo interno un orologio, dunque è in grado di calcolare quanto a lungo ha viaggiato ciascun segnale, quindi la distanza di ciascuno dei tre satelliti. Per determinare la sua posizione il ricevitore deve dunque semplicemente risolvere un sistema di tre equazioni del tutto simile a quello visto in precedenza. Nel modello bidimensionale il problema era quello di intersecare due cerchi. Nel vero caso tridimensionale il problema consiste nell'intersecare tre sfere: due sfere hanno come intersezione un cerchio, che a sua volta interseca la terza sfera in due punti.

Esercizi

1. Quanto tempo impiega la luce a percorrere una distanza di 20200 km? Usate l'approssimazione che abbiamo detto per la velocità della luce c.
2. L'orologio del ricevitore non ha una qualità particolarmente elevata, perché gli orologi molto precisi sono anche molto ingombranti e costosi. Se l'incertezza con cui

è in grado di misurare il tempo di arrivo del segnale è di 1 millesimo di secondo, con quale incertezza possiamo conoscere la sua distanza dal satellite?
3. Se hai risposto correttamente alla domanda precedente, ti sarai reso conto che un'incertezza di 1 millesimo di secondo è del tutto insufficiente a stabilire dove ci troviamo! Se l'orologio fosse in grado di misurare i tempi con la precisione di 1 milionesimo di secondo, a quanto scenderebbe l'incertezza sulla misura della distanza del satellite?
4. Se vogliamo conoscere la distanza del satellite con la precisione di 10 metri, che precisione dovrebbe avere l'orologio del ricevitore GPS?
5. Un piccolo problema giocattolo, per vedere se avete ben compreso il modello bidimensionale. Il satellite S_1 ha coordinate (13,10) mentre le coordinate di S2 sono (8,9). Posizioni e distanze le misuriamo in km, i tempi in secondi, la velocità della luce è di 1 km/s (è solo un modello!). Il vostro ricevitore GPS riceve entrambi i segnali 7 secondi dopo che sono stati emessi. Usate un software per calcolare la vostra posizione: GeoGebra, con cui è stata fatta la figura, è molto comodo per risolvere questo problema.

Avrete notato che, nelle righe precedenti, abbiamo accennato al fatto che, per localizzare la posizione del ricevitore, occorrono i segnali di 4 satelliti.
A cosa serve il quarto satellite? Il problema è legato alla precisione che ci occorre nella misura. Ogni satellite, per poter dire l'ora esatta di emissione di ciascun segnale, monta al suo interno ben quattro orologi atomici. Il ricevitore, per ragioni di costo e di ingombro, utilizza un orologio di qualità nettamente inferiore. C'è dunque un elevato errore nel calcolo che il ricevitore effettua: l'informazione sulla posizione del quarto satellite serve proprio a ridurre l'errore introdotto dalla scarsa qualità dell'orologio contenuto nel ricevitore. In sostanza dobbiamo calcolare 4 grandezze incognite: la posizione (x,y,z) in cui ci troviamo, e l'effettivo tempo t in cui facciamo la misura. Per determinare le 4 incognite ci occorrono 4 equazioni: dal punto di vista geometrico si tratta quindi di trovare i punti di intersezione di quattro sfere . Con la correzione portata dall'uso di quattro satelliti è possibile, con un ricevitore palmare standard, ottenere precisioni dell'ordine del metro.

Consideriamo uno dei 4 satelliti, diciamo il satellite S_1. Ha emesso il suo segnale all'istante t_1, quando si trovava in posizione (x_1,y_1,z_1). Il ricevitore ha captato il segnale al tempo t. Il ricevitore, quindi, si trova ad una distanza da S_1 pari a $R_1 = c\cdot(t-t_1)$, perciò il ricevitore si trova da qualche parte su una sfera di equazione:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = c^2\cdot(t-t_1)^2$$

Esercizio 6: scrivi le altre 3 equazioni, tenendo conto che le coordinate dei satelliti (note) cambiano dall'uno all'altro, le coordinate del ricevitore (incognite) sono le stesse.