

Il problema della pendenza e il problema dell'area

Quello che già sappiamo

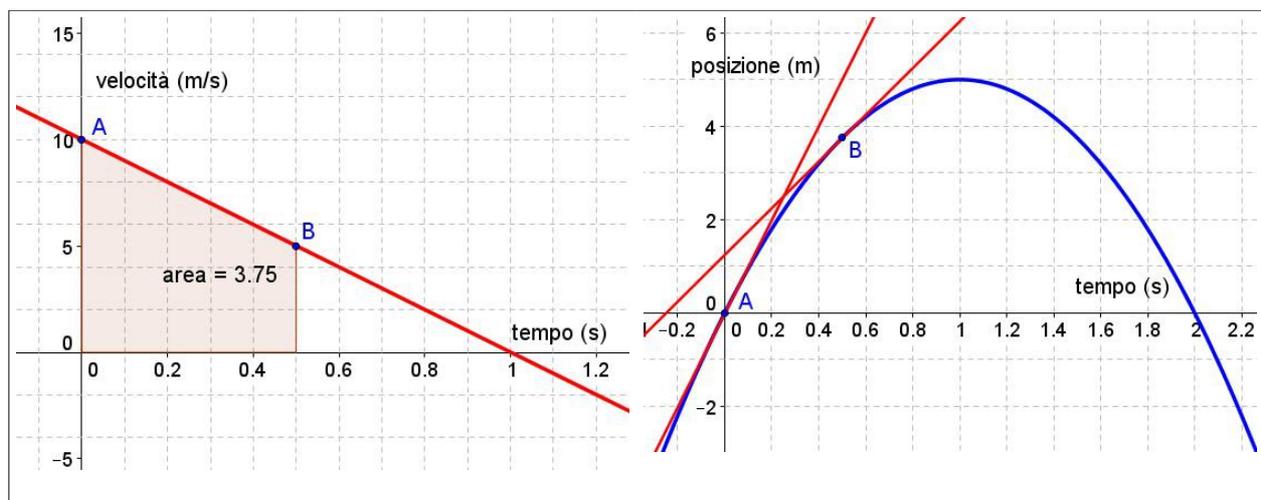
Abbiamo visto che la velocità media è la pendenza della secante al grafico della posizione, il grafico cioè della funzione il cui input è un istante di tempo, e l'output corrispondente è la posizione che il corpo in moto occupa in quell'istante. Per calcolare la velocità media abbiamo bisogno di un intervallo temporale $[t_1, t_2]$ e di due punti sul grafico, le cui ordinate sono le posizioni $S(t_1)$ e $S(t_2)$: la pendenza della secante in questi due punti è la velocità media nell'intervallo che stiamo considerando.

Se l'intervallo $[t_1, t_2]$ si contrae fino a ridursi ad un unico istante t , la secante assume una posizione limite che è quella della tangente al grafico nel punto $[t, S(t)]$: la velocità in quell'istante è la pendenza della tangente al grafico in quel punto.

La variazione di posizione (cioè la distanza percorsa) è l'area sotto al grafico della velocità. Se posizione e velocità le so descrivere con funzioni note, allora dall'una posso ricavare l'altra. Il moto di caduta libera è proprio uno dei casi in cui sappiamo con quali funzioni descrivere la velocità e la posizione.

Un primo esempio

Riprendiamo un vecchio esempio: un sasso viene lanciato da terra verso l'alto con una velocità iniziale di 10 m/s. L'equazione della velocità è $v(t) = 10 - 10 \cdot t$, quella della posizione è $S(t) = 10 \cdot t - 5 \cdot t^2$. Ecco i corrispondenti grafici:



Ragioniamo sugli istanti $t_1 = 0$ e $t_2 = 0.5$. Il grafico della velocità ci dice con quale velocità si muove il sasso in tali istanti: 10 m/s e 5 m/s rispettivamente. Il grafico della posizione ci dice dove, negli stessi istanti, il sasso si trova: altezza 0 e altezza

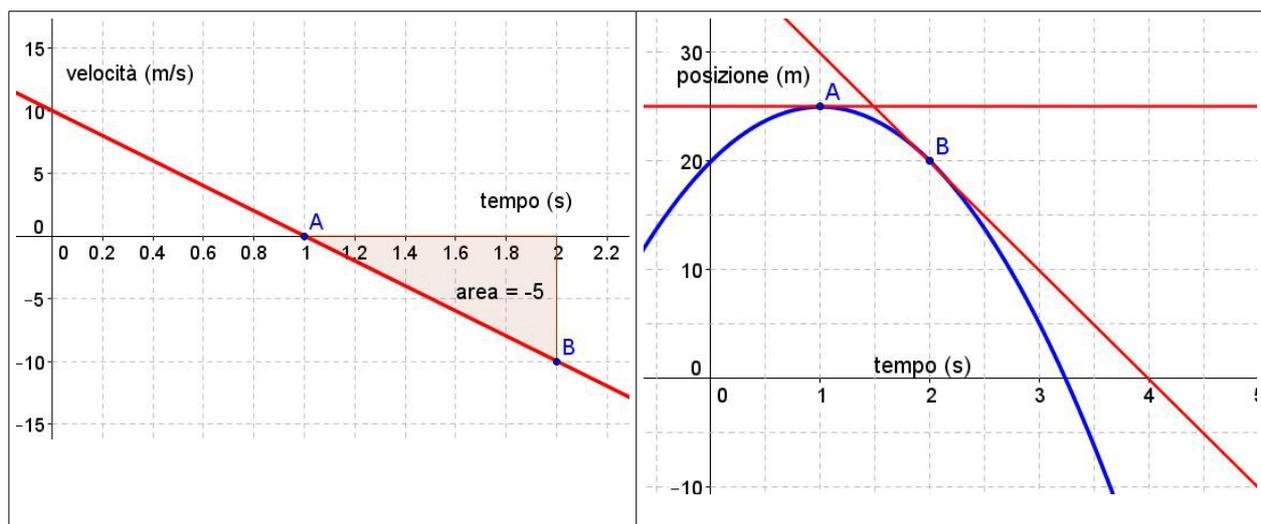
3.75 m rispettivamente (per trovare 3.75 basta sostituire t con 0.5 nell'equazione della posizione).

Le tangenti al grafico della posizione condotte nei punti A e B hanno pendenza 10 m/s e 5 m/s, cioè i valori della velocità in quegli istanti.

L'area tra il grafico della velocità e l'asse delle ascisse, nell'intervallo $[0,0.5]$ è pari a 3.75 m (è positiva, perché si trova sopra all'asse delle ascisse): è proprio la variazione di posizione avvenuta in quell'intervallo.

Un secondo esempio

Lo stesso sasso viene lanciato verso l'alto, con una velocità iniziale di 10 m/s, da un'altezza iniziale di 20 m. Come prima l'equazione della velocità è $v(t) = 10 - 10 \cdot t$, quella della posizione è invece $S(t) = 20 + 10 \cdot t - 5 \cdot t^2$. Ecco i corrispondenti grafici:

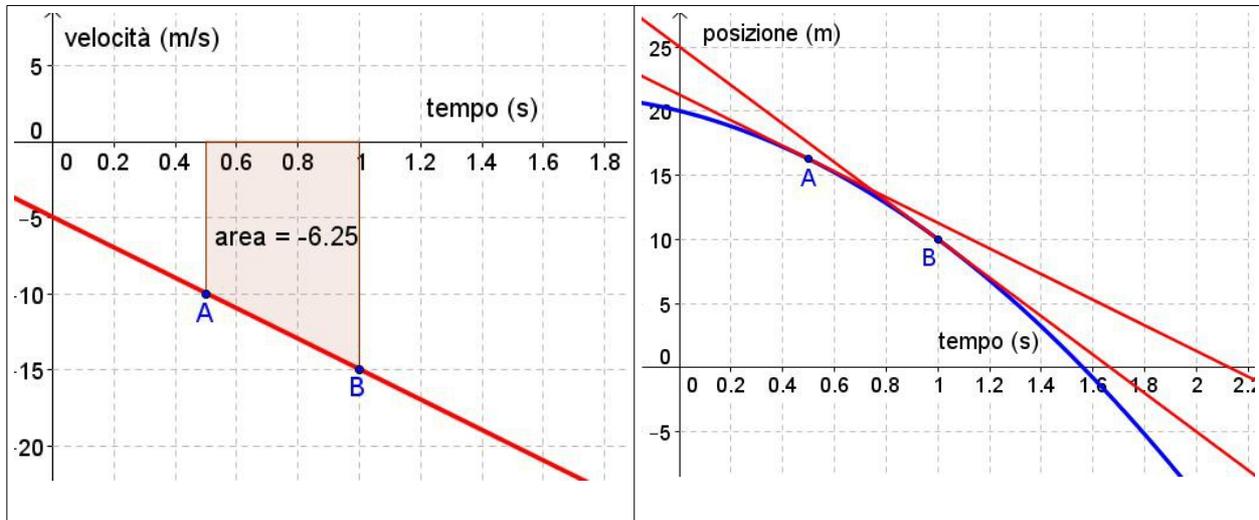


Il grafico della velocità non è cambiato, quello della posizione è una parabola uguale alla precedente, con una traslazione verticale di passo 20. Questa volta ragioniamo sugli istanti $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$. I valori della velocità in questi istanti sono 0 e -10 m/s rispettivamente. Le tangenti al grafico della posizione, negli stessi istanti, hanno pendenza 0 e -10 m/s rispettivamente. Il triangolo compreso tra il grafico della velocità e l'asse delle ascisse, nell'intervallo $[1,2]$, ha area -5 m (il segno meno è dovuto al fatto che si trova sotto all'asse delle ascisse). Nel corso dell'intervallo $[1,2]$ la posizione passa da 25 m a 20 m, con una variazione pari a -5 m.

Un terzo esempio

Il sasso viene lanciato dalla stessa quota iniziale di 20 m, questa volta con una velocità iniziale di -5 m/s (viene cioè scagliato verso il basso). L'equazione della

velocità è $v(t) = -5 - 10 \cdot t$, quella della posizione è invece $S(t) = 20 - 5 \cdot t - 5 \cdot t^2$. Ecco i corrispondenti grafici:



Il grafico della velocità ha la stessa pendenza -10 m/s^2 vista nei casi precedenti, ma questa volta la sua intercetta è -5 m/s . Il grafico della posizione è una parabola con lo stesso coefficiente direttivo -5 m/s^2 visto nei casi precedenti, cioè metà dell'accelerazione di gravità. Il vertice è questa volta nel secondo quadrante, l'intersezione con l'asse delle ordinate è 20 m .

Questa volta ragioniamo sugli istanti $t_1 = 0.5$ e $t_2 = 1$. I valori della velocità in questi istanti sono -10 m/s e -15 m/s rispettivamente. Le tangenti al grafico della posizione, negli stessi istanti, hanno pendenza -10 m/s e -15 m/s rispettivamente. Il trapezio compreso tra il grafico della velocità e l'asse delle ascisse, nell'intervallo $[0.5, 1]$, ha area -6.25 m (il segno meno è dovuto al fatto che si trova sotto all'asse delle ascisse). Nel corso dell'intervallo $[0.5, 1]$ la posizione passa da 16.25 m a 10 m , con una variazione pari a -6.25 m .