Lezione 9: Le equazioni del moto di caduta dei corpi

9.1. Il moto di caduta libera

Nella lezione 8 abbiamo visto che in un moto con accelerazione costante c'è una relazione di proporzionalità quadratica tra lo spazio percorso e il tempo impiegato, quindi il grafico tempo – posizione è una parabola. Gli esperimenti di Galileo sul piano inclinato hanno dimostrato che il grafico tempo – posizione di un corpo che cade è proprio una parabola. Ecco le conclusioni che possiamo trarre:

- il moto di caduta è un moto con accelerazione costante;
- la funzione del piano inclinato è quella di ridurre l'accelerazione: più piccola è l'inclinazione, minore è l'accelerazione;
- tutti gli oggetti cadono con la stessa accelerazione, indipendentemente dalla loro massa.

Il moto di caduta libera è troppo rapido perché Galileo potesse studiarlo. Oggi invece è facile farlo, per esempio con foto stroboscopiche. Il risultato che otteniamo è il seguente:
il moto di caduta libera di un qualsiasi oggetto è un moto accelerato con un'accelerazione $g \approx 9{,}8\ m/s^2$, che si chiama accelerazione di gravità. Le equazioni di tale moto sono quindi:

$$\begin{cases} v(t) = g \cdot t \\ S(t) = S_0 + \dfrac{1}{2} g \cdot t^2 \end{cases}$$

9.2. Una forza particolare: il peso

Sappiamo che un moto uniformemente accelerato è prodotto dall'azione di una forza costante, perciò concludiamo che la caduta di un corpo avviene sotto l'azione di una forza costante: questa forza si chiama peso ed è diretta sempre verso il centro della Terra. Attenzione quindi a non confondere massa e peso:

- la massa di un corpo è una grandezza che misura la sua inerzia, cioè la sua capacità di resistere alle accelerazioni;
- il peso di quello stesso corpo è una forza che lo attrae verso il centro della Terra (o verso il centro della Luna, se l'oggetto si trova là…).

Se chiamiamo F_P la forza peso che agisce su un oggetto qui sulla Terra, possiamo calcolarla conoscendo la massa del corpo. La seconda legge della dinamica infatti dice che la forza è data dal prodotto della massa su cui agisce per l'accelerazione che produce:

$$F_P = m \cdot g$$

Se abbiamo due corpi, il primo di massa m_1 = 1 kg, il secondo di massa m_2 = 10 kg, i loro pesi sono rispettivamente:

$$F_{P1} = m_1 \cdot g = 1\,kg \cdot 9{,}8\,m/s^2 = 9{,}8\,N$$

$$F_{P2} = m_2 \cdot g = 10\,kg \cdot 9{,}8\,m/s^2 = 98\,N$$

Il corpo con la massa dieci volte più grande è anche 10 volte più pesante:
massa e peso sono grandezze direttamente proporzionali, e la costante di proporzionalità è l'accelerazione di gravità g.
Questo è il motivo per cui, nel linguaggio comune, si tende a confondere i due concetti.

9.3. Il moto dei proiettili

Un corpo lasciato cadere, scende quindi secondo la legge $S = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$, dove g è l'accelerazione di gravità: $g \approx 9{,}8\ m/s^2$. La distanza percorsa in un secondo di caduta è perciò $S \approx \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ m/s^2 \cdot 1\ s^2 \approx 4{,}9\ m$.
I moti di oggetti sottoposti all'azione della forza peso si possono analizzare utilizzando questo semplice principio:

l'azione della gravità durante un tempo t di moto consiste *sempre* nel far scendere l'oggetto che si muove di una distanza $S = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ rispetto alla quota a cui sarebbe arrivato se la gravità non ci fosse stata (►fig.9.1).

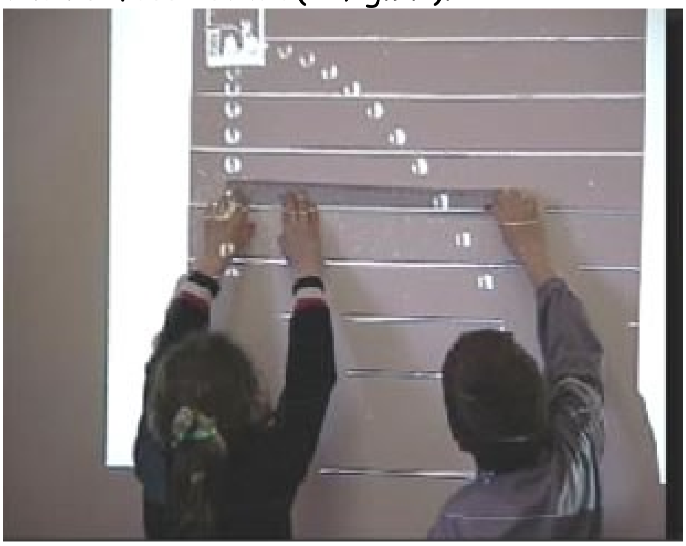

Fig.9.1 Fotografia stroboscopica del moto di due palle

La palla di sinistra viene lasciata cadere, quella di destra è lanciata con una velocità iniziale orizzontale. L'effetto della gravità è lo stesso su entrambe: come si vede, tra un flash e il successivo entrambe subiscono uno stesso spostamento verticale.
In generale, la traiettoria che un proiettile percorre durante il suo volo è una parabola (►fig.9.2). La linea continua rappresenta la traiettoria che si avrebbe se la gravità non

agisse: in assenza di forze avremmo un moto rettilineo e uniforme. la linea tratteggiata rappresenta la traiettoria che viene effettivamente percorsa, trascurando come al solito la resistenza dell'aria. La differenza tra le due traiettorie aumenta con il trascorrere del tempo: ad un istante t qualsiasi la distanza tra le due è pari alla caduta $S = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ che il proiettile ha subito nel frattempo.

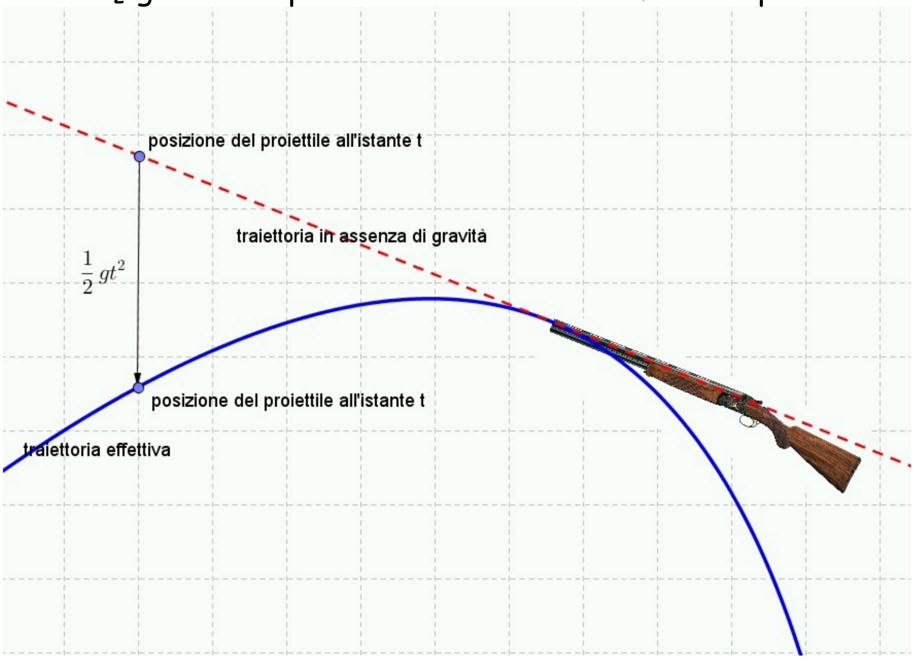

Fig.9.2 La traiettoria di un proiettile è una parabola (linea continua blu)
In assenza di gravità il moto sarebbe rettilineo uniforme (linea tratteggiata rossa)

9.4. Un lancio davvero potente

Avevamo cominciato la sesta lezione con una domanda che poteva sembrare provocatoria: "perché una freccia lanciata da un arco non si mette ad orbitare intorno alla Terra?". La domanda diede molto da riflettere a Newton, che giunse ad una risposta semplice e sorprendente al tempo stesso: se la freccia non si mette ad orbitare è soltanto perché non è stata scagliata con velocità sufficiente. L'idea di Newton è spiegata dalla figura che segue (►fig.9.3):

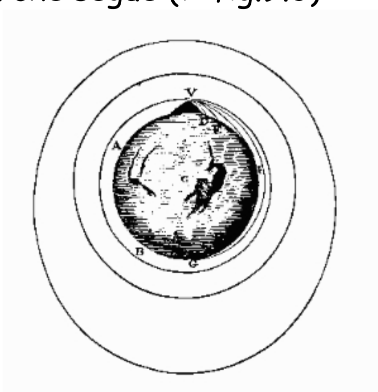

Fig.9.3 Se la velocità iniziale è abbastanza grande, il proiettile entra in orbita

Quando scagliamo una freccia in direzione orizzontale (cioè parallela al terreno), la vediamo cadere poco lontano da noi, ma, se riusciamo a darle una velocità molto grande, il tragitto che essa compie è maggiore, tanto che diventa importante considerare il fatto che la superficie della Terra è sferica e non piatta. Se il lancio è fiacco, la freccia, scagliata dal punto V, ricade poco lontano. Se aumentiamo la velocità, il punto di caduta si sposta più lontano, per esempio nel punto G. Cosa succede, si domandò Newton, aumentando ancora la velocità? Non c'è via di scampo: oltre una certa velocità la freccia non può affatto ricadere sulla superficie della Terra. Semplicemente, si mette ad orbitare intorno ad essa.
Quanto deve essere grande, come minimo, la velocità con cui scagliamo la freccia? Sembra una domanda molto complicata, e invece la risposta (almeno in linea di principio) richiede solo un uso intelligente del teorema di Pitagora!

9.5. La prima velocità cosmica

Cerchiamo dunque di rispondere alla domanda del paragrafo precedente. Supponiamo che la freccia non incontri alcun attrito da parte dell'aria che attraversa: non è realistico, naturalmente, ma è quello che accadrebbe se facessimo la prova sulla Luna (la Luna, infatti, non ha atmosfera).
Esaminiamo il moto della freccia utilizzando questo principio: in assenza di gravità e di attrito dell'aria, la freccia si muoverebbe in linea retta, mantenendo la stessa velocità con cui viene lanciata.
Se la velocità con cui la lanciamo è di 7,9 km/s, la caduta di 4,9 m che si verifica nel primo secondo di moto è proprio quello che ci vuole per riportarla sulla superficie della Terra. Abbiamo così fatto in modo che essa orbiti lungo la circonferenza con il raggio più piccolo che possa esistere: appena un po' di più del raggio della Terra.
Questa particolare velocità è così importante da meritare un nome: si chiama infatti prima velocità cosmica. Ora vediamo in dettaglio come se ne ricava il valore.

Se il lancio avviene in direzione orizzontale, con una velocità di x km/s, durante il primo secondo di moto la freccia percorre una distanza di x km in direzione orizzontale, quindi tangente alla superficie della Terra. Nel frattempo cade in direzione del centro della Terra di $\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ che per t=1s è 0,0049 km (cioè 4,9 m) (►fig.9.4):

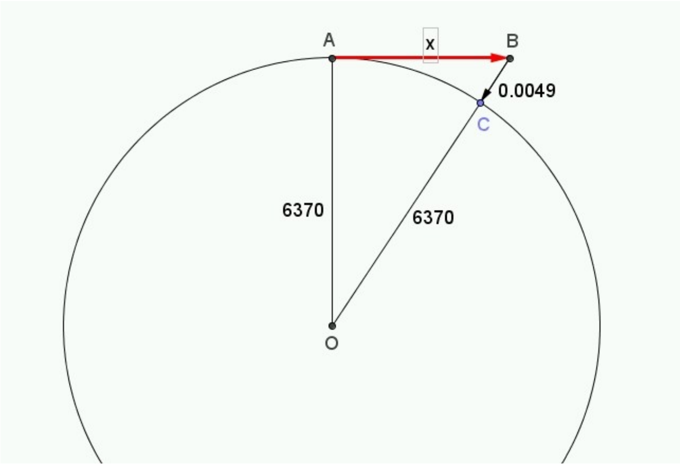

Fig.9.4 Il teorema di Pitagora applicato al moto della freccia

La condizione perché la freccia si muova lungo un'orbita che rasenta il terreno è che questa caduta di 4,9 m la riporti esattamente al livello di partenza rispetto al centro della Terra, cioè sulla sua superficie.
Applicando il teorema di Pitagora al triangolo di Fig.9.5 abbiamo quindi la seguente condizione:

$$X^2 + R^2 = (R + 0{,}0049)^2$$

Assumiamo per il raggio della Terra il suo valore medio R = 6370 km. Otteniamo:

$$X^2 + 6370^2 = 6370{,}0049^2$$
$$X^2 = 6370{,}0049^2 - 6370^2$$
$$X^2 = 62{,}5^2$$
$$X = 7{,}9$$

(abbiamo approssimato il risultato a 2 cifre significative)
Per mettere un satellite in orbita intorno alla terra, il metodo che si usa non consiste, naturalmente, nel lanciarlo con una velocità così elevata! Uno Space Shuttle può essere messo in orbita intorno alla Terra, ma non lo si fa lanciandolo, parallelamente al terreno, alla velocità di 7,9 km/s. Il metodo che si usa consiste nel farlo portare dai suoi motori gradualmente fino all'orbita prevista per la sua missione.

9.6. Il moto circolare uniforme

In questa lezione abbiamo cominciato a considerare il moto di oggetti che percorrono traiettorie circolari (per esempio i corpi in orbita attorno alla Terra). Ci proponiamo quindi capire come sono diretti i vettori velocità e accelerazione nel caso del moto circolare uniforme.
Il significato dei due aggettivi circolare e uniforme dovrebbe essere chiaro: "circolare" dice che la traiettoria è appunto una circonferenza, "uniforme" significa che il numero di metri percorsi ogni secondo è sempre lo stesso.

Possiamo quindi concludere che la velocità in questo tipo di moto è costante? Certamente no.
Nel moto circolare uniforme la velocità è un vettore che in ogni punto è tangente alla traiettoria percorsa, quindi il suo modulo è costante, ma direzione e verso cambiano in continuazione (►fig.9.5).
Il vettore accelerazione, che ha la direzione di Δv (cioè v_2 - v_1), in questo caso punta esattamente verso il centro della circonferenza: si chiama quindi accelerazione centripeta (centripeta significa proprio "che si dirige verso il centro") e la indicheremo con il simbolo a_c.
Con calcoli complessi, che noi non svolgiamo, si può dimostrare che il modulo di questa accelerazione è

$$a_c = v^2 /R$$

dove v è il modulo della velocità, mentre R è il raggio della traiettoria circolare.

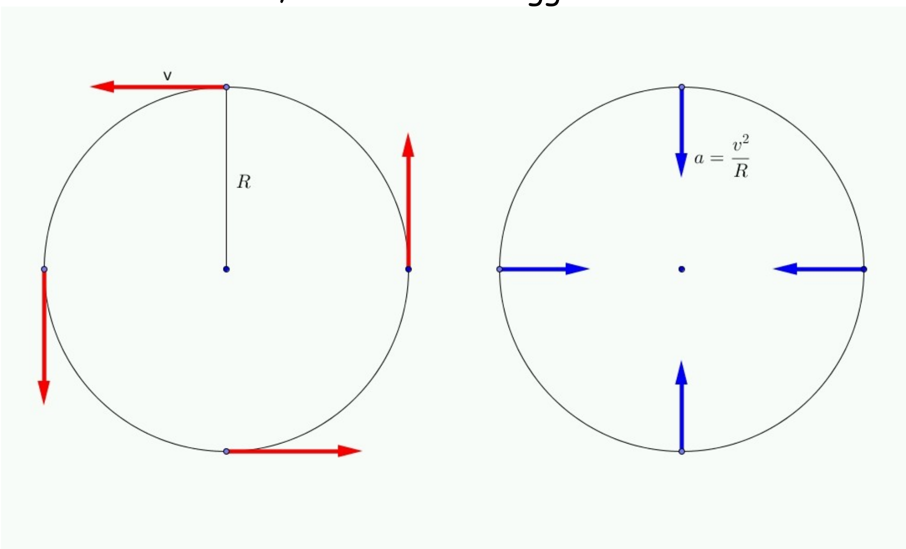

Fig.9.5 Velocità e accelerazione nel moto circolare uniforme

Se consideriamo il moto della freccia che orbita intorno alla Terra ci accorgiamo che le cose funzionano perfettamente. C'è un'accelerazione diretta verso il centro della Terra, la cui causa è una forza diretta verso il centro della Terra: la forza peso, naturalmente.
Un fazzoletto che viene centrifugato dentro una lavatrice percorre una traiettoria circolare, quindi ha un'accelerazione diretta verso il centro del cestello. Questa accelerazione è prodotta da una forza che lo spinge verso il centro, esercitata dalle pareti del cestello stesso. Se la cosa non vi convince, pensate alla funzione dei buchi disposti lungo le pareti del cestello: quando una goccia d'acqua incontra un buco, non riceve più la spinta diretta verso il centro. Non può più, quindi, muoversi di moto circolare. La goccia esce in direzione tangente alla superficie del cestello, e il fazzoletto si asciuga.