Lezione 12: La legge di gravitazione universale.

12.1. L'accelerazione di un proiettile

Abbiamo visto nella lezione 9 che la velocità di 7,9 km/s (prima velocità cosmica) è quella che permette a un corpo, quale che sia la sua massa, di percorrere intorno alla Terra un'orbita di raggio 6370 km (pari cioè proprio al raggio della Terra).
L'accelerazione centripeta in questo moto è:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{7{,}9^2\,\frac{km^2}{s^2}}{6370\,km} = 0{,}0098\,\frac{km}{s^2} = 9{,}8\,\frac{m}{s^2}$$

Questo risultato non ci sorprende:
- per compiere un moto circolare ci deve essere una forza in direzione del centro, e questa forza è l'attrazione gravitazionale, cioè il peso;
- il peso, sulla superficie della Terra, produce un'accelerazione, diretta verso il centro, pari a 9,8 m/s^2;
- l'accelerazione centripeta nel moto orbitale non può quindi essere che di 9,8 m/s^2.

12.2. L'accelerazione della Luna

Un oggetto scagliato alla velocità di 7,9 km/s, che percorre un'orbita di raggio 6370 km, sarebbe un satellite artificiale della Terra, per la precisione il satellite con l'orbita più vicina che sia possibile.
La Terra, come tutti sappiamo, ha un satellite naturale: la Luna. Le caratteristiche del suo moto intorno alla Terra sono le seguenti:
- il raggio dell'orbita è $r = 3{,}8 \cdot 10^5$ km
- il tempo che impiega a percorrere l'orbita è di T = 27,3 giorni

Se si fanno i conti si vede che l'accelerazione centripeta della Luna, nella sua orbita intorno alla Terra, è 3600 volte più piccola di quella di un oggetto che percorre l'orbita rasoterra:

$$v = \frac{2r\pi}{T}$$

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{\frac{4\pi^2 r^2}{T^2}}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\cdot(3{,}14)^2\cdot 3{,}82\cdot 10^5}{(27{,}3\cdot 86400)^2} = 0{,}0027\,\frac{m}{s^2}$$

$$\frac{9{,}8}{0{,}0027} \approx 3600$$

Newton si accorse di un fatto davvero notevole: 3600 è il quadrato di 60, e la Luna dista dalla Terra circa 60 raggi terrestri! (►fig.12.1)

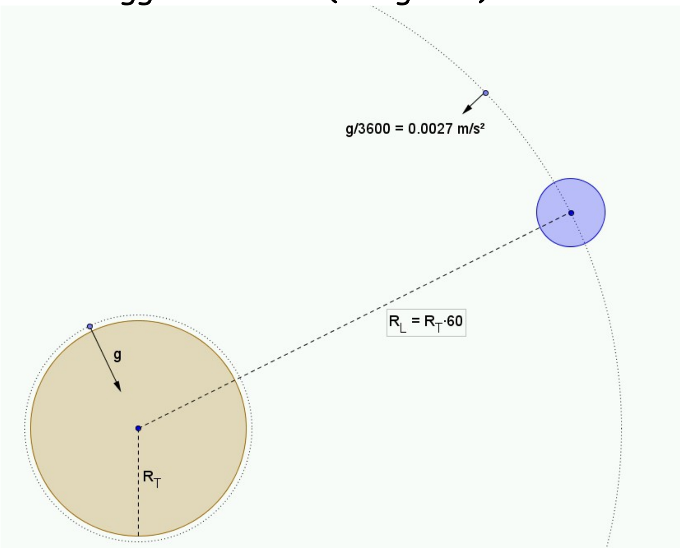

Fig.12.1 La Luna, che orbita a una distanza di 60 raggi terrestri, ha un'accelerazione 60^2 volte più piccola rispetto a un'orbita rasoterra (il disegno non è in scala!)

Fu questa osservazione che suggerì a Newton la teoria della gravitazione universale: i moti terresti (ad esempio quello di un proiettile che cade) e i moti celesti (ad esempio il moto orbitale della Luna) sono dovuti alla stessa forza, cioè l'attrazione della Terra. Pur trattandosi della stessa forza, a una distanza 60 volte maggiore l'attrazione diventa $60^2 = 3600$ volte più piccola, e perciò produce un'accelerazione 3600 volte più piccola.

12.3. La legge di gravitazione universale

Le considerazioni viste al paragrafo precedente condussero Newton a formulare una legge di carattere generale. Essa è nota come legge di gravitazione universale, ed afferma che:

due corpi qualsiasi, di masse m_1 e m_2, posti a una distanza r, si attraggono con una forza, detta attrazione gravitazionale, che è direttamente proporzionale a ciascuna delle due masse, e inversamente proporzionale al quadrato della distanza che le separa. In formula:

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Una precisazione importante: se gli oggetti sono sferici, come lo sono (almeno approssimativamente) il Sole e i pianeti, la distanza r che compare nella formula è quella che separa i loro centri.

L'aggettivo universale significa che essa è valida ovunque nell'immenso Universo. Possiamo usarla per calcolare l'attrazione tra il Sole e Giove, oppure tra una stella qualsiasi ed un suo pianeta, distanti milioni di anni luce dal noi.

12.4. La costante G

La costante di proporzionalità G, che compare nella formula che abbiamo appena visto, si chiama costante di gravitazione universale, e fu misurata per la prima volta da Henry Cavendish, pochi anni dopo la morte di Newton. Le misure furono ripetute poi più volte e il valore che oggi accettiamo è il seguente:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

Questo significa che due corpi, ciascuno di massa 1 kg, posti alla distanza di 1 m, si attraggono con una forza pari a:

$$F = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot \frac{1kg \cdot 1kg}{1m^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} N$$

È davvero una forza molto piccola! Il valore di G, molto basso, spiega perché non ci accorgiamo dell'attrazione gravitazionale che c'è tra corpi di normali dimensioni, quelli che incontriamo nella vita di tutti i giorni.
La forza di attrazione gravitazionale, viceversa, diventa importante se almeno uno dei due oggetti ha una massa molto grande. La massa della Terra è $m_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg. Un corpo di massa m = 1 kg, vicino alla sua superficie, dista $6{,}37 \cdot 10^6$ m dal suo centro. La forza di attrazione tra la Terra e l'oggetto è quindi:

$$F = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} kg \cdot 1kg}{(6{,}37 \cdot 10^6)^2 m^2} = 9{,}8\ N$$

Il risultato non ci sorprende: 9,8 N è proprio la forza che, applicata ad un corpo di massa 1 kg, provoca un'accelerazione di 9,8 m/s^2.

12.5. Come si trasmette la forza di gravitazione?

Due masse, dunque, esercitano un'azione reciproca l'una sull'altra. Potremmo pensare che quest'azione sia il risultato di un'interazione diretta tra le due masse, quasi una specie di "azione a distanza" tra di esse. L'azione a distanza, tuttavia, è per noi molto difficile da accettare, abituati come siamo al fatto che l'azione si trasmette attraverso un contatto diretto tra i corpi. Per fare un esempio banale: non è strano che i pedali esercitino un'azione sulla ruota posteriore della bicicletta, ma ci è difficile pensare che possano farlo senza che vi siano gli anelli di una catena allineati nello spazio tra pedali e ruota. In modo del tutto analogo: il Sole esercita la sua azione attrattiva sulla Terra, ma cosa c'è nello spazio tra i due, capace di trasmettere questa azione? Cosa, se non 150 milioni di chilometri di vuoto?

12.6. L'idea di campo

Un modo efficace che i fisici hanno sviluppato per descrivere questo tipo di interazione consiste nell'ipotizzare che il Sole modifichi in qualche modo lo spazio intorno a sé, e che la Terra, a sua volta, reagisca a questa deformazione dello spazio. Questa è, a grandi linee, l'idea di campo. Ragionare in termini di campo significa che, quando vogliamo calcolare l'azione che il Sole esercita sulla Terra, decidiamo di separare il problema in due passi distinti:

– prima calcoliamo il campo che il Sole genera intorno a sé;
– poi calcoliamo la forza che questo campo esercita sulla Terra.

Se l'idea di campo servisse soltanto a questo sarebbe poco più di un gioco di parole: ci piace pensare che tra il Sole e la Terra ci sia qualcosa capace di trasmettere l'azione, ma siccome non sappiamo cosa sia ci inventiamo un nome per indicarlo (campo, appunto) e pretendiamo che ciò lo renda un poco più reale. Per fortuna c'è molto di più che una nostra pretesa: vedremo più avanti in questo corso che i campi hanno un'esistenza reale, si muovono nello spazio, trasportano energia ed informazioni.
Per convenzione, il valore del campo gravitazionale in un punto qualsiasi dello spazio è pari alla forza che sente una massa unitaria posta in quel punto. E se in quel punto, invece di una massa unitaria, mettiamo un oggetto di massa m qualsiasi? Facile: il valore del campo è definito come il rapporto tra la forza F e la massa m. Il campo gravitazionale, dunque, si misura in newton al kg.
Poiché la forza è una grandezza vettoriale, il campo gravitazionale è un campo vettoriale: ha una direzione, un verso ed un'intensità in ogni punto dello spazio.

12.7. Un esempio numerico

Quanto vale il campo gravitazionale che il Sole produce ad una distanza di 150 milioni di chilometri? Una distanza di 150 milioni di chilometri è proprio quella a cui si trova la Terra. Usiamo dunque la Terra come oggetto, e calcoliamo la forza che essa sente a causa del Sole:

$$F = G\, m_S m_T / r^2$$

Per calcolare il modulo g del campo gravitazionale bisogna fare il rapporto tra la forza F e la massa m_T dell'oggetto che stiamo considerando:

$$g = F / m_T = G\, m_S / r^2 =$$
$$= 6.67 \times 10^{-11} \times 1.99 \times 10^{30} / (1.5 \times 10^{11})^2 = 5.9 \times 10^{-3}\ \mathrm{N / kg}$$

La direzione ed il verso del campo gravitazionale sono gli stessi della forza: dunque è descritto da una freccia che punta verso il Sole. La sua intensità è di circa 6 millesimi di newton al kg: ciò significa che se avessimo considerato, invece della Terra, un corpo di massa 1kg, esso avrebbe avvertito una forza attrattiva, dovuta al campo generato dal Sole, pari a circa 6 millesimi di newton.
La Terra, che è enormemente più pesante, sente una forza enormemente più grande. Il rapporto tra forza e massa è però lo stesso per qualsiasi corpo che si trovi a 150 milioni di chilometri dal Sole: vale circa 6 millesimi di newton al kg, e si chiama campo gravitazionale del Sole alla distanza di 150 milioni di km dal suo centro.

12.8. La massa della Terra

Come si può misurare la massa della Terra? Non c'è bilancia al mondo che permetta di fare la misura di una massa così grande in modo diretto. Conosciamo però il valore dell'accelerazione di gravità sulla sua superficie ($g = 9{,}8\ m/s^2$) e la misura del suo raggio ($r = 6{,}37 \cdot 10^6$ m).
Con queste informazioni, per chi conosce la legge di gravitazione universale, è facile calcolare la massa del nostro pianeta. Il risultato del calcolo è il seguente:

$$m_T = 6.0 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

Consideriamo infatti un oggetto di massa m, posto vicino alla superficie della Terra. La sua distanza dal centro è quindi $r = 6{,}37 \cdot 10^6$ m. La forza che lo attrae verso il centro è:

$$F = G \frac{m_T \cdot m}{r^2}$$

La sua accelerazione è quindi:

$$g = \frac{F}{m} = G \frac{m_T}{r^2}$$

Se risolviamo questa equazione rispetto all'incognita m_T troviamo:

$$m_T = \frac{gr^2}{G} = \frac{9{,}8 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = \frac{9{,}8 \cdot 40{,}6 \cdot 10^{12}}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 6{,}0 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

12.9. Sole e pianeti

Come la Luna orbita intorno alla Terra, così la Terra orbita intorno al Sole: si dice che la Terra è un pianeta della stella Sole. I pianeti del Sole sono nove: per ciascuno di essi riportiamo in tabella (►tab.12.1) la massa m, il raggio dell'orbita r e il periodo di rivoluzione T.

Pianeta	Massa m (in rapporto alla massa della Terra)	Raggio dell'orbita r (10^6 km)	Periodo di rivoluzione T (anni)
Sole	330000	-	-
Mercurio	0,0553	57,9	0,241
Venere	0,8150	108,2	0,615
Terra	1	149,6	1,000
Marte	0,1074	227,9	1,881
Giove	317,89	778,3	11,862
Saturno	95,17	1427,0	29,456
Urano	14,56	2871,0	84,07
Nettuno	17,24	4497,1	164,81
Plutone	0,02	5913,5	248,53

tab 12.1

La velocità con cui un pianeta orbita intorno al Sole è $v = 2\pi \frac{r}{T}$. Utilizzando i dati in tabella si vede che i pianeti non hanno tutti lo stesso rapporto r/T, perciò non hanno la stessa velocità orbitale. Al contrario, la velocità diventa via via più piccola per i pianeti più lontani dal Sole: la Terra percorre la sua orbita alla velocità di circa 30 km/s, per Marte la velocità è di circa 24 km/s.

$$v_{Terra} = 2\pi \frac{r_T}{T_T} = 6{,}28 \cdot \frac{149{,}6}{1} \approx 940 \, \frac{10^6 \text{ km}}{\text{anno}} = 940 \cdot \frac{10^6 \text{ km}}{365 \cdot 8{,}64 \cdot 10^4 \text{ s}} \approx 30 \, \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$v_{Marte} = 2\pi \frac{r_M}{T_M} = 6{,}28 \cdot \frac{227{,}9}{1{,}881} \approx 760 \, \frac{10^6 \text{ km}}{\text{anno}} = 760 \cdot \frac{10^6 \text{ km}}{365 \cdot 8{,}64 \cdot 10^4 \text{ s}} \approx 24 \, \frac{\text{km}}{\text{s}}$$