L'impulso di una forza che varia nel tempo

Un riassunto di quel che sappiamo

Riprendiamo in esame il solito carrellino che si trova sopra la rotaia a basso attrito. Se una forza costante F agisce sul carrellino per un intervallo temporale pari a Δt, allora posso valutare il suo effetto cumulativo calcolando il termine $F \cdot \Delta t$. Questo termine si chiama impulso, ed è una grandezza che si misura in N·s. Se rappresentiamo con un grafico il valore della forza F in funzione del tempo, l'impulso non è altro che l'area sotto il grafico della forza, calcolato tra l'istante iniziale e quello finale. Non dobbiamo neppure preoccuparci di sapere se il carrello fosse inizialmente fermo, oppure già in moto con una certa velocità iniziale v_i. In ogni caso si ha:

$$F \cdot \Delta t = m \cdot a \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v = m \cdot v_f - m \cdot v_i$$

Il termine $m \cdot v$ si chiama quantità di moto: all'inizio la quantità di moto del carrello era $m \cdot v_i$, alla fine è diventata $m \cdot v_f$. Possiamo perciò dire: l'effetto cumulativo della forza, espresso attraverso l'impulso da essa esercitato, si traduce nel fatto che la quantità di moto del carrello subisce un aumento pari all'impulso esercitato dalla forza.

E se la forza varia nel tempo?

Come possiamo trattare il caso in cui la forza non è costante nel tempo? Vediamo quello che succede, ad esempio, quando il carrello urta contro una molla che si trova in fondo alla rotaia. La molla è collegata ad un sensore di forza, quindi possiamo misurare la forza che essa esercita sul carrello. Ecco il grafico che abbiamo ottenuto in un esperimento di questo tipo:

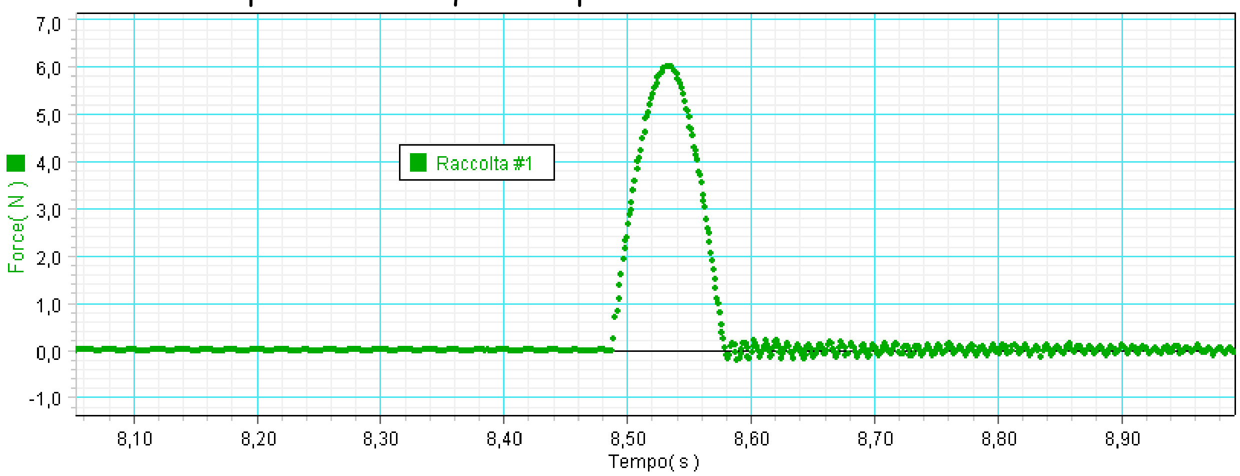

Fig.13.app.1 Forza registrata nell'urto di un carrello contro una molla

Come si vede, l'urto è durato circa 10 centesimi di secondo. Prima dell'urto la forza misurata dal sensore è zero, salvo qualche piccola oscillazione dovuta al fatto che il carrello in moto fa vibrare un po' la rotaia, quindi anche la molla. Dopo che l'urto è terminato le oscillazioni intorno al valore zero sono un po' più ampie, e ci vuole del tempo perché l'oscillazione della molla si smorzi. Quel che ci interessa calcolare è l'impulso esercitato dalla molla sul carrello nei 10 centesimi di secondo che sono il tempo effettivo in cui il carrello è stato in contatto con la molla. Vediamo uno zoom sull'intervallo che ci interessa:

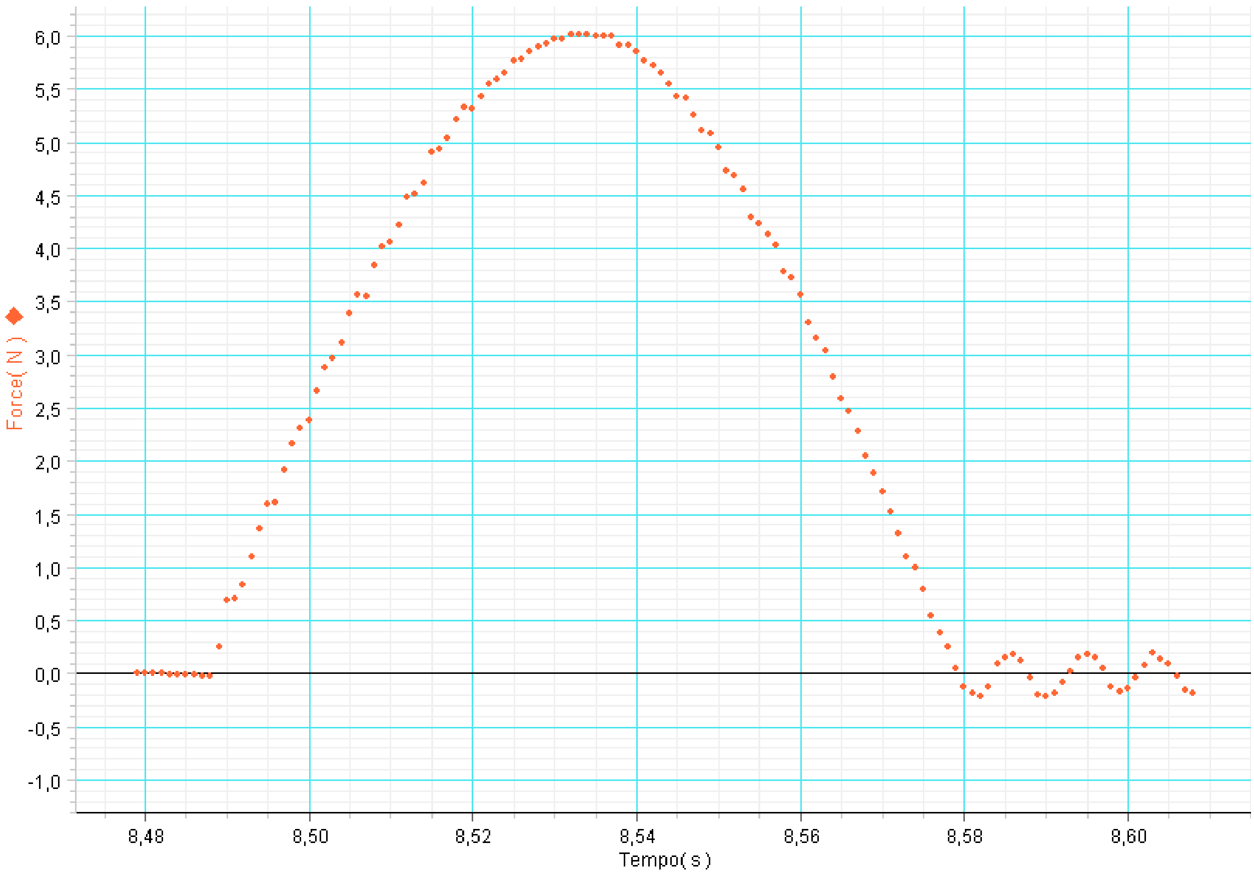

Fig.13.app.2 Uno zoom sull'immagine precedente

Ci accorgiamo subito che la forza non è stata misurata in modo continuo, bensì a scatti. Tra una misura e l'altra intercorre un tempo di 1/1000 s: si dice allora che la frequenza di acquisizione è stata di 1000 Hz, intendendo dire con ciò che il sensore di forza ha fatto 1000 misure al secondo.

La nostra intuizione ci dice che la forza è variata in modo continuo. Con questa espressione intendiamo dire che, se il sensore avesse potuto lavorare con input (cioè istanti di tempo) sempre più fitti, allora avremmo ottenuto in output valori di forza sempre più fitti.

Come calcolare l'impulso? Semplice: calcoliamo l'impulso esercitato in ciascun millesimo di secondo, moltiplicando per 10^{-3} s il valore di forza misurato in quell'intervallo. Poi sommiamo tutti gli impulsi. In questo modo calcoliamo un'ottima approssimazione dell'area compresa sotto il vero grafico della forza, che immaginiamo continuo. In linea di principio possiamo migliorare quanto vogliamo l'approssimazione: basta acquisire valori di forza a intervalli più brevi, riducendo così il salto tra un output e il successivo. In realtà questo miglioramento non è possibile, perché la frequenza di 1000 Hz è quella massima a cui può funzionare il sensore di forza che abbiamo usato.

Il software che gestisce l'acquisizione è in grado di calcolare l'area che ci interessa: il valore che fornisce è 0.34 N·s. Noi possiamo riottenere questo risultato con un opportuno programma di R, che legge ed elabora il file che contiene i dati acquisiti.

Urti brevi e urti lunghi

Per chiarire meglio il concetto mostriamo quello che è accaduto in due esperimenti analoghi a questo che stiamo descrivendo. I due grafici che seguono hanno esattamente la stessa forma: in effetti descrivono quello che è accaduto quando lo stesso carrello è stato lanciato, più o meno alla stessa velocità, contro due molle ben diverse.

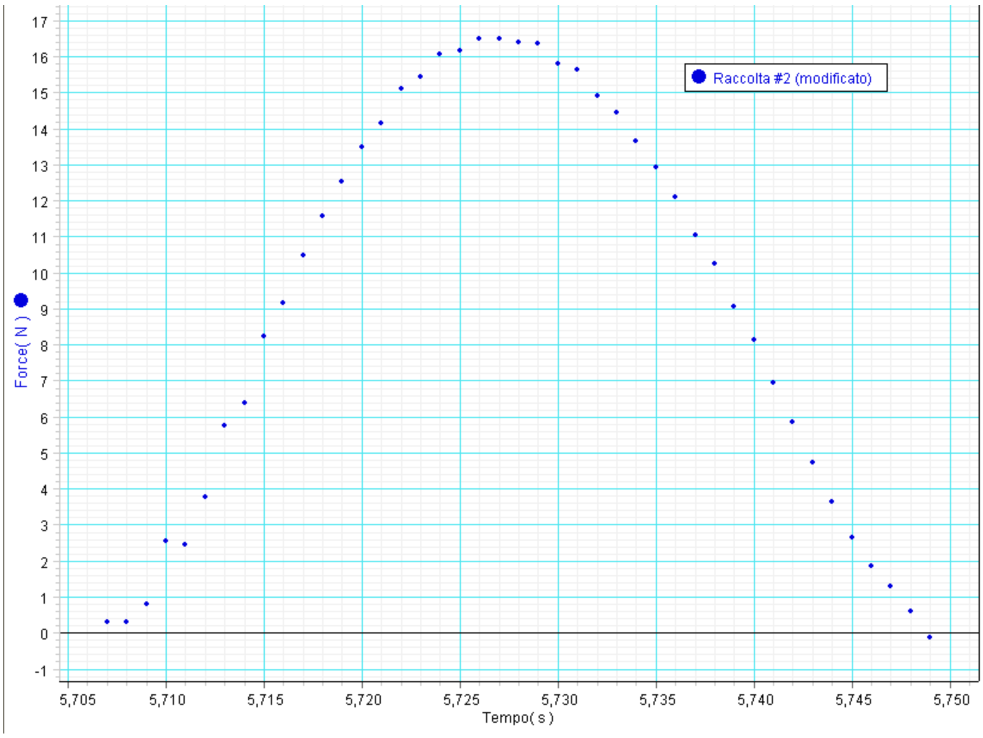

Fig.13.app.3 Un urto contro una molla rigida

Il grafico qui sopra si riferisce all'esperimento fatto con la molla più rigida, quindi con una maggiore costante elastica. L'urto è breve, dura infatti circa 4 centesimi di secondo. La forza massima che misuriamo è intensa: più di 16 newton.

Il prossimo grafico si riferisce all'esperimento fatto con una molla più morbida, cioè con una minore costante elastica. L'urto è più lungo, dura infatti un po' più del doppio rispetto a prima, circa 9 centesimi di secondo. La forza massima che misuriamo è quindi meno intensa: meno di 7 newton, quindi un po' meno della metà. Provate a valutare l'impulso esercitato nei due casi: i risultati dovrebbero essere più o meno gli stessi.

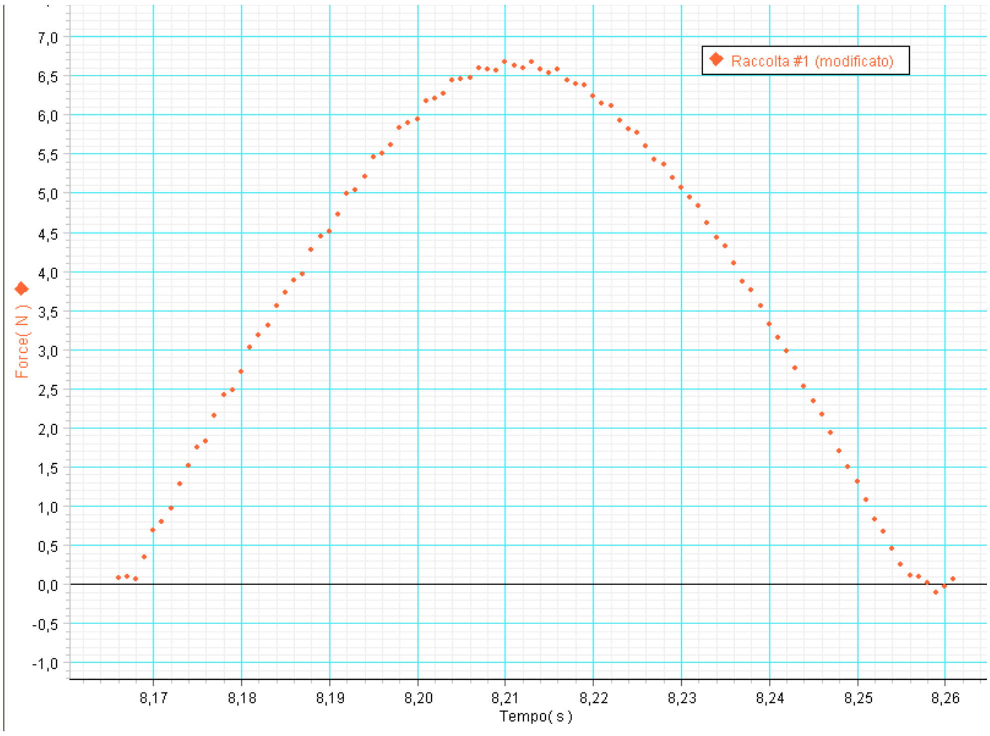

Fig.13.app.4 Un urto contro una molla morbida

L'impulso è uguale alla variazione della quantità di moto

Torniamo adesso all'esperimento che stiamo analizzando in dettaglio (figure 1 e 2): l'impulso che abbiamo calcolato è stato di 0.34 N·s. Abbiamo detto in precedenza che l'impulso è uguale alla variazione della quantità di moto, cioè al termine $m \cdot \Delta v$. La massa del carrello è di 0.259 kg, la variazione di velocità può essere calcolata a partire dai dati acquisiti da un sonar durante il moto del carrello. Ecco il grafico tempo_posizione:

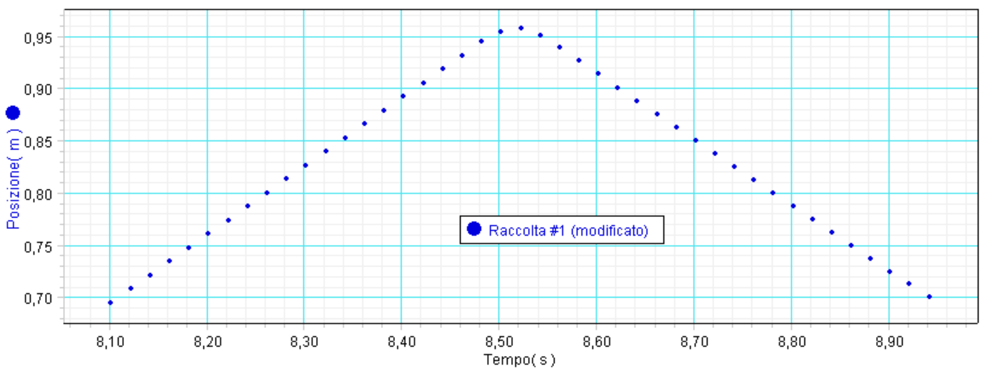

Fig.13.app.5 Il grafico tempo posizione registrato durante l'urto della figura 1

Come si può vedere il moto è uniforme sia nella fase di andata, sia in quella di ritorno. Il sonar funziona alla frequenza di 50 Hz, una frequenza 20 volte più piccola di quella impostata per il sensore di forza: ciò è ragionevole, perché l'urto è un fenomeno brevissimo, che dobbiamo analizzare con una frequenza di acquisizione molto grande.

Il software di gestione è in grado di calcolare la pendenza dei due tratti rettilinei:
+ 0.66 m/s il tratto in salita, - 0.64 m/s quello in discesa.

La differenza Δv è perciò di 0.66 - (- 0.64) = 1.30 m/s. Ricaviamo quindi: $m \cdot \Delta v$ = 0.259 kg · 1.3 m/s = 0.34 N·s. Abbiamo quindi verificato che l'impulso esercitato dalla molla sul carrello è proprio uguale, almeno entro la cifra di posto -2, alla variazione di quantità di moto subita dal carrello stesso.

Esercizi.

1. Calcolate l'area compresa tra il grafico e l'asse delle ascisse nella figura 2: è vero il valore fornito dal software, cioè 0.34 N·s?
2. Calcolate l'area compresa tra il grafico e l'asse delle ascisse, sia per la figura 3 sia per la figura 4. E' vero che sono più o meno uguali?
3. Spiegate che cosa rappresenta ciascuna delle due aree dell'esercizio precedente, quindi spiegate perché sono più o meno uguali.
4. Calcolate la pendenza dei due tratti rettilinei di figura 5. E' vero quel che dice il software, e cioè che le pendenze sono 0.66 m/s e - 0.64 m/s?