L'energia di un fluido in moto e l'equazione di Bernoulli

Il principio di Bernoulli

Nella lezione 11 abbiamo imparato a descrivere, in alcune semplici situazioni, il modo in cui si comporta un fluido fermo. In questo approfondimento vogliamo occuparci di quello che accade quando il fluido si muove, per esempio scorrendo lungo un tubo. Si tratta in generale di un problema straordinariamente complicato, che possiamo affrontare soltanto ricorrendo a semplificazioni molto drastiche.

- La prima condizione è che il fluido in questione sia incomprimibile: detto in altri termini la sua densità deve essere sempre la stessa, comunque sia fatto il tubo in cui scorre.
- La seconda è che il suo moto sia stazionario, cioè che la velocità del fluido in un punto qualsiasi del tubo non subisca variazioni nel corso del tempo. Vedremo che la velocità può variare da un punto all'altro, ma scelto un punto essa non deve variare da un istante all'altro.
- La terza è che il moto sia irrotazionale, cioè che non si manifesti lungo il tubo la presenza di vortici e mulinelli.
- La quarta è che non agiscano forze di tipo viscoso, cioè che il fluido non perda energia meccanica a causa degli attriti che potrebbero verificarsi tra uno strato e l'altro. Il miele, per esempio, ha un comportamento assai più viscoso rispetto all'acqua: il principio di Bernoulli, quindi, non si applicherà di certo al moto del miele lungo un tubo.

Nonostante il grande numero di ipotesi semplificative che abbiamo fatto, le conclusioni cui si giunge si rivelano di grande interesse nella descrizione del moto di un fluido reale.

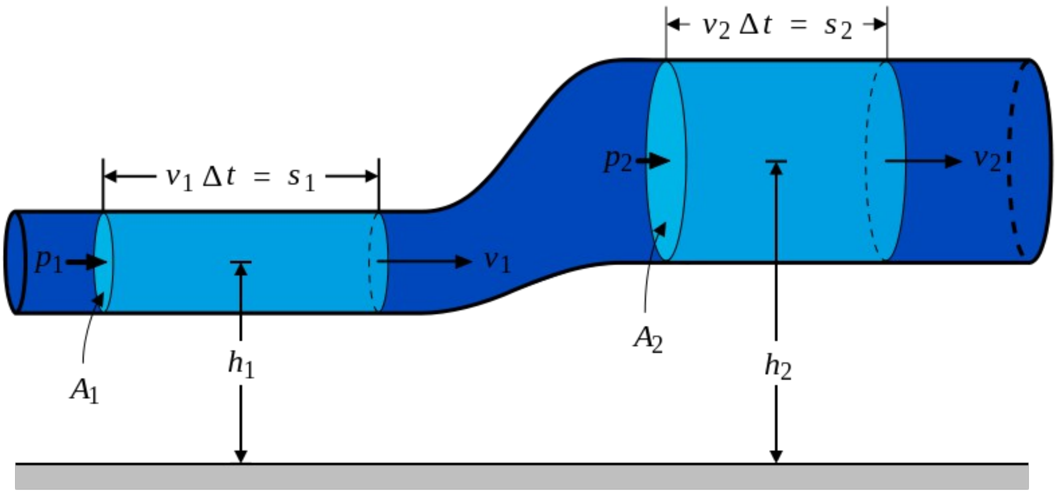
Il principio cui ci riferiamo fu formulato da Daniel Bernoulli, nel suo libro Hydrodynamica pubblicato nel 1738. Nella sua forma più semplice e intuitiva esso afferma che:

un aumento di energia cinetica del fluido che scorre in un tubo
deve essere accompagnato da una diminuzione della sua energia potenziale
oppure da una diminuzione della sua pressione.

La prima parte dell'affermazione precedente è chiara: se il tubo in cui il liquido scorre è in discesa, allora il liquido acquista energia cinetica a mano a mano che perde energia potenziale, o viceversa se il tubo sale. La seconda parte dell'affermazione è meno ovvia: per dimostrarla dovremo tenere conto di come le forze di pressione influenzano il moto del fluido.

Una dimostrazione del principio di Bernoulli

Nella prossima figura il fluido si muove da sinistra verso destra: il tubo sale, e il fluido accresce la sua energia potenziale. Inoltre il tubo si allarga, e a causa di ciò il liquido si muove più lentamente, diminuendo quindi la sua energia cinetica.



Consideriamo la porzione di fluido compresa tra la sezione A_1 e la sezione A_2. Nel tempo Δt durante il quale la sezione A_1 avanza di un tratto s_1, accade che la sezione A_2 avanzi di un tratto s_2 minore di s_1, perché la corrispondente sezione è più grande. Infatti il liquido è incomprimibile, quindi il volume A_1s_1 è uguale al volume A_2s_2. Moltiplicando per la densità ρ del liquido, che è la stessa in ogni punto del tubo, troviamo che $\rho A_1s_1 = \rho A_2s_2 = m$ è la massa di liquido che si è spostata da sinistra verso destra nel tempo Δt.
Tale massa di liquido ha cambiato la sua energia cinetica durante lo spostamento, e la variazione subita si può calcolare mediante il teorema lavoro - energia cinetica, calcolando cioè il lavoro fatto dalle forze che agiscono sul liquido.
Dobbiamo tenere conto di due contributi: il lavoro fatto dalle forze di pressione, e quello fatto dalla forza di gravità.
Quanto al primo contributo si osserva che il liquido è sottoposto ad una forza F_1 che agisce verso destra per un tratto s_1, dove $F_1 = P_1A_1$, e ad una forza F_2 che agisce verso sinistra per un tratto s_2, dove $F_2 = P_2A_2$. Il lavoro complessivamente fatto dalle forze di pressione sulla porzione di massa m è quindi:

$$L_P = P_1A_1s_1 - P_2A_2s_2 = P_1m/\rho - P_2m/\rho$$

Il lavoro fatto dalla forza di gravità su quella stessa porzione è:

$$L_g = mgh_1 - mgh_2$$

Si tratta di un lavoro negativo, come è giusto che sia: il fluido sale, mentre la forza di gravità è diretta verso il basso. Il lavoro L complessivamente esercitato sulla porzione di fluido di massa m è perciò:

$$L = L_P + L_g = P_1 m/\rho - P_2 m/\rho + mgh_1 - mgh_2$$

La variazione di energia cinetica di tale porzione è:

$$\Delta E_C = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$

Il teorema lavoro - energia cinetica assicura che $L = \Delta E_C$, quindi:

$$P_1 m/\rho - P_2 m/\rho + mgh_1 - mgh_2 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$

Possiamo cancellare m, fattore comune, e scambiare opportunamente di posto i termini, in modo che quelli con pedice 1 siano a sinistra, quelli con pedice 2 a destra. Otteniamo:

$$P_1/\rho + gh_1 + \tfrac{1}{2}v_1^2 = P_2/\rho + gh_2 + \tfrac{1}{2}v_2^2$$

Tenuto conto che 1 e 2 sono punti qualsiasi del fluido, possiamo riscrivere l'equazione di Bernoulli nella forma seguente:

$$P/\rho + gh + \tfrac{1}{2}v^2 = \text{costante}$$

Se il tubo non subisce variazioni di quota, ma solo di sezione, il principio di Bernoulli diventa semplicemente:

$$P_1/\rho + \tfrac{1}{2}v_1^2 = P_2/\rho + \tfrac{1}{2}v_2^2$$

Se ne conclude che, nel caso di un tubo orizzontale, la pressione è minore là dove la velocità è maggiore. E' un'esperienza che forse vi sarà capitato di fare trovandovi in un gruppo numeroso di persone che debbono passare attraverso un varco stretto. Lontano dal varco si avanza lentamente e la pressione è grande. In prossimità del varco la velocità con cui si procede diventa più grande, e cala di conseguenza la pressione cui siete sottoposti.

Una dimostrazione di quanto appena detto la trovate al seguente indirizzo:

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Venturi_Tube_en.webm

Un caso particolare che già conosciamo

Il caso particolare che vogliamo trattare è quello in cui il fluido sia fermo dentro al tubo. Avremo naturalmente $v_1 = v_2 = 0$, e in tal caso l'equazione di Bernoulli diventa semplicemente:

$$P_1/\rho + gh_1 = P_2/\rho + gh_2$$

cioè:

$$P_1 - P_2 = \rho g(h_2 - h_1)$$

Abbiamo insomma ritrovato la legge di Stevin discussa nella lezione 11. Detto in parole: la pressione è maggiore là dove è maggiore la profondità, essendo la variazione di pressione proporzionale alla differenza di profondità, alla accelerazione di gravità e alla densità del fluido.

Un'applicazione spettacolare

Tra le tante conseguenze del principio di Bernoulli ne citiamo una soltanto: la forza diretta dal basso verso l'alto che si esercita sull'ala di un aeroplano in volo e ne bilancia il peso, permettendone quindi la sostentazione. Tale forza, denominata portanza, è almeno in parte dovuta al fatto che l'ala è sagomata in modo tale che il flusso dell'aria che scorre sopra ad essa sia più veloce di quello che scorre al di sotto. Il principio di Bernoulli assicura che la pressione che agisce sotto all'ala sia quindi maggiore di quella che agisce sopra: questa differenza di pressione produce quindi una forza diretta verso l'alto, che contribuisce a bilanciare il peso.

Un po' di numeri e qualche esercizio

Supponiamo che il tubo della figura abbia un diametro di 5 cm nella parte sottile, e di 10 cm in quella più larga, con un dislivello di 50 cm tra le due parti del tubo. Il fluido che si muove sia semplicemente acqua, quindi con una densità $\rho = 1000\ kg/m^3$. Supponiamo infine che l'acqua, spinta da una pressione $P_1 = 5 \cdot 10^4$ Pa, si muova con una velocità $v_1 = 4$ m/s nella parte sottile del tubo.

1. Qual è la portata del tubo? Detto in altri termini: quanti litri d'acqua attraversano ogni secondo una qualsiasi sezione del tubo?
2. Qual è la velocità dell'acqua nella parte di tubo più larga?
3. Qual è il rapporto tra le velocità nei 2 tratti di tubo? Perché?
4. Qual è la pressione dell'acqua nella parte di tubo più larga?
5. Seguiamo, almeno idealmente, il moto di 1 kg d'acqua lungo il tubo: qual è la sua energia meccanica quando si trova nel tratto sottile? Per rispondere assumete come livello zero dell'energia potenziale quello a cui si trova il tratto inferiore del tubo.
6. Quanto vale l'energia meccanica del kg d'acqua quando si trova nel tratto di tubo più largo?
7. L'energia meccanica di quel kg d'acqua si è conservata oppure no? Spiegate quello che è accaduto, usando le parole al posto delle equazioni.