Lezione 15: L'energia potenziale e l'energia meccanica

15.1. L'energia potenziale gravitazionale

Consideriamo quello che succede quando solleviamo un oggetto, applicando un forza appena superiore al peso dell'oggetto stesso (►fig.15.1)

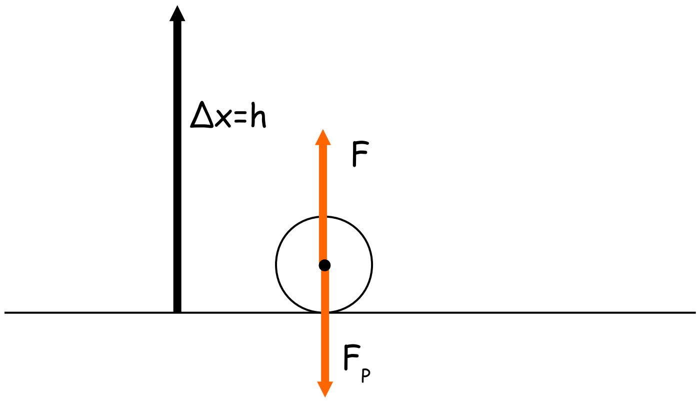

Fig.15.1 Un oggetto viene sollevato applicando una forza uguale e contraria al suo peso.

Durante la salita l'oggetto non acquista energia cinetica, tutto quello che accade è che dopo un po' si ritrova, fermo, ad un'altezza *h*. Che fine ha fatto il lavoro $L = F \cdot \Delta x = m \cdot g \cdot h$ che abbiamo compiuto? Lasciando andare il corpo, esso cadrà, accelerando verso il basso per effetto della forza peso: in questo modo acquisterà energia cinetica. Se vogliamo che l'energia si conservi dobbiamo perciò considerare una nuova forma di energia, che chiamiamo **energia potenziale gravitazionale**.

L'energia potenziale gravitazionale di un oggetto di massa m
che si trova ad un'altezza h rispetto ad un livello scelto come riferimento è: $E_{PG} = mgh$

L'energia potenziale gravitazionale si misura quindi in $N \cdot m/s^2 \cdot m$, cioè, ancora una volta, in joule.

15.2. L'energia meccanica

Abbiamo introdotto l'energia potenziale gravitazionale per spiegare come mai, sollevando lentamente un oggetto, compiamo lavoro senza far crescere la sua energia cinetica. Ma siamo sicuri che questa definizione sia coerente con ciò che già sappiamo sul moto di caduta libera?
Certamente sì: quando un oggetto cade da una certa altezza, inizialmente possiede un'energia potenziale, che diminuisce durante la discesa. Contemporaneamente aumenta, esattamente della stessa quantità, la sua energia cinetica.
È un esempio semplice e meraviglioso di quanto Feynman ci ha detto: esiste una grandezza il cui valore non cambia durante un evento complicato come una caduta.

Questa grandezza è la somma delle due energie (cinetica e potenziale), che chiamiamo energia meccanica.

*L'**energia meccanica** (E_M) posseduta da un corpo è la somma della sua energia potenziale e della sua energia cinetica: $E_M = E_{PG} + E_C = mgh + \frac{1}{2}mv^2$*

L'energia meccanica di un corpo che cade, dunque, rimane costante durante la caduta! Una dimostrazione rigorosa di questa affermazione richiede qualche conto, ma non è affatto difficile. Cosa succede, infatti, durante un tempo di caduta pari a Δt? Utilizzando le equazioni del moto vediamo che:

- viene percorso un tratto, diretto verso il basso, di lunghezza $\Delta h = \frac{1}{2}g\Delta t^2$. Quindi l'altezza da terra diminuisce di altrettanto
- viene raggiunta una velocità $v = g\Delta t$

A causa di questi due fatti cambiano sia l'energia potenziale, sia quella cinetica. Vediamo le rispettive variazioni:

$$\Delta E_{PG} = mg\Delta h = -\, mg\tfrac{1}{2}g\Delta t^2 = -\,\tfrac{1}{2}mg^2\Delta t^2$$
$$\Delta E_C = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m(g\Delta t)^2 = \tfrac{1}{2}mg^2\Delta t^2$$

La somma di queste due variazioni è zero: l'energia meccanica non cambia durante la caduta!

Anche se il corpo viene lanciato verso l'alto possiamo ragionare nello stesso modo: inizialmente possiede una grande energia cinetica, che durante la salita diminuisce, perché diminuisce la velocità. Questa diminuzione, però, è compensata da un uguale aumento di energia potenziale, in modo tale che l'energia meccanica mantenga sempre lo stesso valore.
Allo stesso modo, l'energia meccanica si conserva nel corso delle oscillazioni di un pendolo (►fig.15.2).

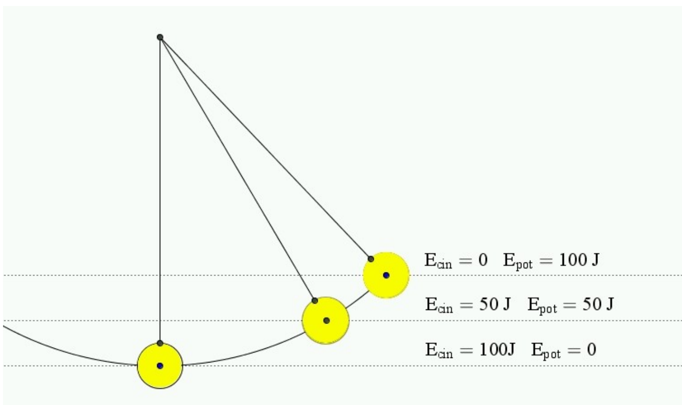

Fig.15.2 l'energia meccanica del pendolo si conserva

Nella figura, il livello scelto come riferimento per misurare l'energia potenziale della pallina è quello che corrisponde alla quota minima raggiunta durante l'oscillazione, quando il filo è verticale. In quella posizione l'energia potenziale gravitazionale è zero.

15.3. L'energia potenziale elastica

Ora vogliamo analizzare un'altra situazione in cui *sembra* che l'energia scompaia: come in precedenza, riusciremo a definire una nuova forma di energia, in modo tale che l'energia non scompare affatto, ma si converte da una forma all'altra.
Consideriamo quindi una sfera che scende, senza incontrare attrito, lungo un piano inclinato. In fondo al piano la sfera incontra una molla e quindi subisce un rimbalzo contro di essa, in seguito al quale risale lungo il piano fino a ritornare alla posizione di partenza (►fig.15.3).

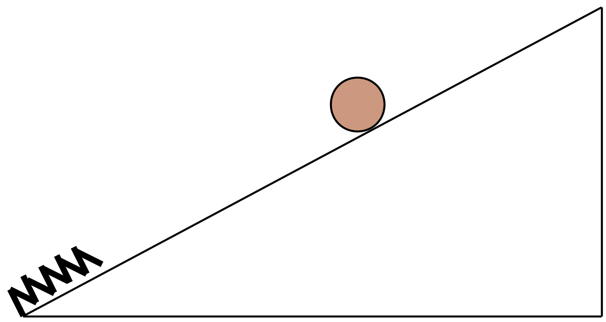

Fig.15.3 Una semplice catena di trasformazioni: la discesa lungo il piano inclinato porta la sfera a rimbalzare contro la molla

Durante la discesa è chiaro che cosa succede: c'è una trasformazione di energia potenziale in energia cinetica (durante la salita avviene esattamente la trasformazione inversa). Il problema è capire cos'è che accade durante il rimbalzo: certamente la molla comincia a comprimersi, rallentando la sfera fino a fermarla, poi la fa tornare indietro, fino a restituirle la stessa velocità con cui l'aveva colpita. C'è un istante, insomma, in cui la sfera è ferma: quindi non ha più energia cinetica, e non ha più nemmeno energia potenziale gravitazionale, perché è arrivata in fondo allo scivolo. Che fine ha fatto l'energia? Visto che in quell'istante c'è una molla compressa, dovremo fare l'ipotesi che una molla compressa immagazzini energia: la chiameremo **energia potenziale elastica**. Nei prossimi paragrafi impareremo a calcolare questa forma di energia.

15.4. La forza esercitata da una molla

Per calcolare quanta energia immagazzina una molla deformata, dobbiamo prima imparare a calcolare quanta forza esercita. Sappiamo già che la forza è direttamente proporzionale alla deformazione (è su questo principio che si basa il funzionamento delle bilance a molla).
Se la molla risulta deformata di un tratto $\Delta\vec{x}$, la forza che essa esercita è quindi (►fig.15.4):

$$\vec{F} = -k \cdot \Delta\vec{x}$$

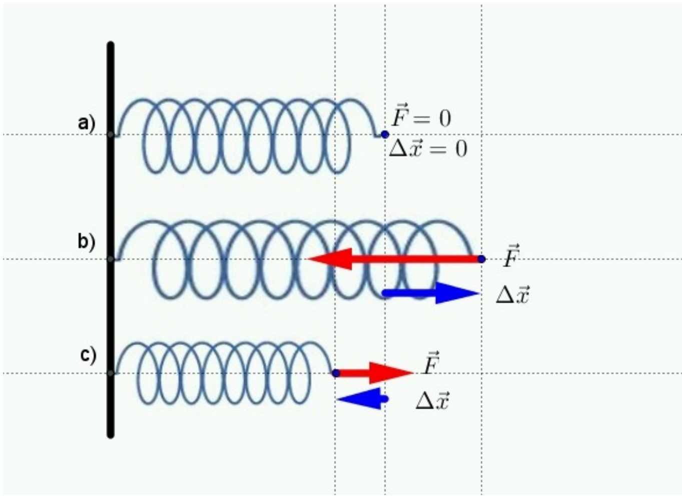

Fig.15.4 Come sono diretti i vettori deformazione e forza per una molla compressa o allungata – a) la molla è in posizione di riposo - b) la molla è allungata di un tratto $\Delta\vec{x}$ - c) la molla è compressa di un tratto $\Delta\vec{x}$. Il vettore $\vec{F}$ ha sempre verso opposto a quello di $\Delta\vec{x}$.

Abbiamo indicato con k la costante di proporzionalità, ed abbiamo messo un segno meno perché la forza esercitata dalla molla si oppone alla deformazione: provate a comprimerla, ed essa spingerà per espandersi, allungatela, ed essa cercherà di tornare alle dimensioni originarie.
La costante di proporzionalità k si chiama **costante elastica** della molla, e si misura in N/m. Il suo significato è semplice: più grande è k, più la molla è rigida, ovvero più grande è la forza che esercita quando viene deformata.

15.5. Come si calcola l'energia potenziale elastica

La formula $\vec{F} = -k \cdot \Delta\vec{x}$ ci permette di calcolare quanto lavoro compie la molla nella fase in cui si espande nuovamente, per spingere verso l'alto la sfera del paragrafo 15.3.
Forza e spostamento hanno la stessa direzione e lo stesso verso: i due vettori hanno la direzione del piano, il loro verso è quello della salita. Quindi il lavoro è semplicemente

forza per spostamento, ma attenzione: quale forza? All'inizio (quando la molla è compressa di un tratto Δx), il modulo della forza è $k \cdot \Delta x$, alla fine (quando la molla è tornata alle dimensioni originarie) la forza è zero. La forza media è allora:

$$F_{media} = \tfrac{1}{2}(k \cdot \Delta x + 0) = \tfrac{1}{2} k \cdot \Delta x$$

E possiamo perciò calcolare il lavoro che la molla compie:

$$L = F_{media} \Delta x = \tfrac{1}{2} k \cdot \Delta x^2$$

Per una molla di costante elastica k, deformata di un tratto Δx, definiamo perciò l'**energia potenziale elastica** in questo modo:

$$E_{PE} = \tfrac{1}{2} k \cdot \Delta x^2$$

Notate che l'unità di misura dell'energia potenziale elastica è il joule, come deve essere:

$$\frac{N}{m} \cdot m^2 = N \cdot m = J$$

15.6. Una trasformazione in due tappe

Come si trasforma l'energia mentre la pallina scende lungo il piano inclinato? Possiamo analizzare le trasformazioni che avvengono in due tappe distinte:

- prima che la sfera incontri la molla, c'è una trasformazione di energia potenziale gravitazionale in energia cinetica
- dopo che la sfera ha incontrato la molla, l'energia cinetica viene trasformata in energia potenziale elastica.

Consideriamo le forme di energia presenti in tre momenti distinti:

- Istante 1: la pallina si trova, ferma, in cima allo scivolo la cui altezza è h. La sua energia è tutta potenziale, quindi è mgh.
- Istante 2: la pallina, giunta in fondo allo scivolo, incontra la molla. L'energia della pallina è tutta cinetica, quindi è $\tfrac{1}{2}mv^2$. L'energia si è conservata, perciò $\tfrac{1}{2}mv^2 = mgh$.
- Istante 3: la pallina si trova in fondo allo scivolo, ferma contro la molla compressa di un tratto Δx. L'energia della pallina è zero, quella della molla è $\tfrac{1}{2}k\Delta x^2$. Se l'energia si è conservata, dovrà essere $\tfrac{1}{2}k\Delta x^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 = mgh$.

È proprio vero che $\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}mv^2$? Analizziamo quello che accade durante l'interazione tra l'estremità della molla e la pallina. Entrambe si spostano di un tratto Δx verso il fondo dello scivolo. Per la terza legge della dinamica, le forze che agiscono su molla e pallina sono uguali e opposte (►fig.15.5):

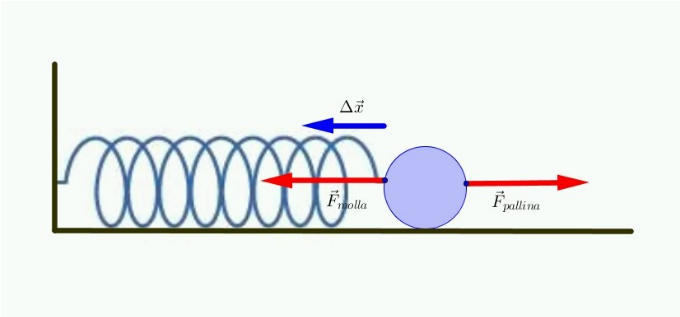

Fig.15.5 durante l'interazione tra molla e pallina, le forze che agiscono sui due oggetti sono uguali e opposte

I lavori compiuti sui due oggetti sono perciò uguali e di segno opposto. Sappiamo già che il lavoro compiuto sulla molla è $\frac{1}{2}k\Delta x^2$: quello compiuto sulla pallina è quindi $-\frac{1}{2}k\Delta x^2$. Questo lavoro, come abbiamo visto nella scorsa lezione, provoca un'uguale diminuzione di energia cinetica: $-\frac{1}{2}k\Delta x^2 = -\frac{1}{2}mv^2$. Basta cambiare i due segni ed il gioco è fatto.