Lezione 18: la meccanica dei corpi rigidi

18.1. Corpi estesi e punti materiali

Pur senza mai dirlo apertamente, fin qui abbiamo parlato di **corpi puntiformi,** ovvero, come si dice abitualmente, di **punti materiali**. Quest'ultima espressione indica corpi dotati di massa (perciò "materiali"), e tuttavia sottoposti a forze che possiamo considerare tutte agenti in un unico punto (come se il volume del corpo si riducesse a quell'unico punto).
I corpi del mondo reale non sono affatto puntiformi: quando una forza agisce, è importante sapere in quale punto esattamente agisca. Eppure, in alcune circostanze, possiamo davvero trattare il corpo come se fosse puntiforme. Una cassa poggiata sul pavimento è un punto materiale oppure no? La risposta dipende da come sono fatte le forze che agiscono (►fig.18.1).

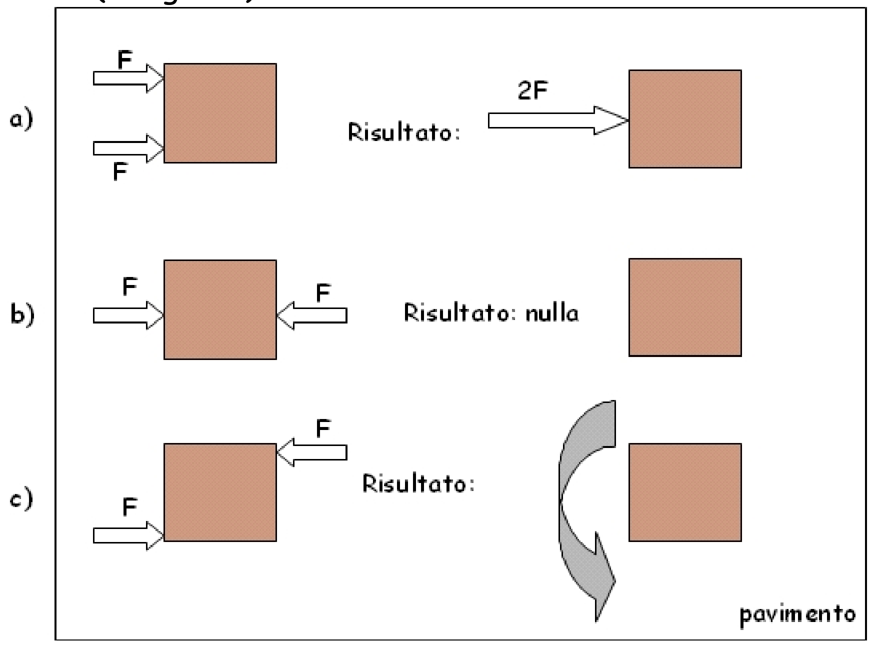


Fig.18.1 Due forze della stessa intensità, parallele al pavimento, agiscono su una cassa. La scena viene osservata dall'alto.

Nei casi a) e b) nulla cambierebbe se le dimensioni della cassa si riducessero ad un punto: si avrebbe comunque un effetto doppio nel caso a), e un effetto nullo nel caso b). Nel caso c), viceversa, il fatto che la cassa sia estesa non si può trascurare, perché produce un risultato importante: una rotazione!

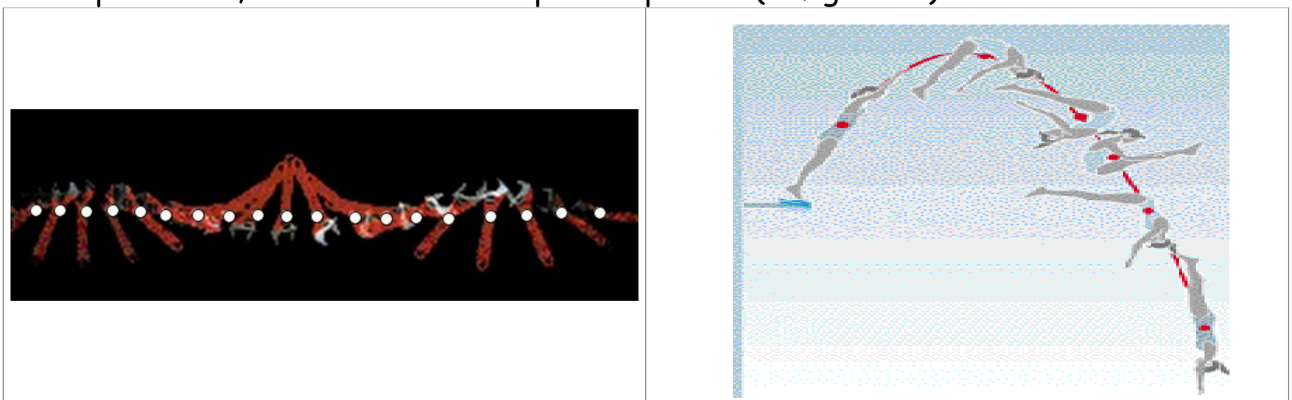
18.2. Elastico, plastico, rigido

La cassa del paragrafo precedente è un ottimo esempio di quello che comunemente viene chiamato **corpo rigido**. Si definisce così un corpo per cui le distanze tra un punto

e l'altro restano le stesse, anche quando applichiamo delle forze su di esso. Se al posto della cassa (►fig.18.1) mettiamo un blocco di plastilina, nel caso b) il blocco si deforma: questo vuol dire che alcuni punti si avvicinano, mentre altri si allontanano.
Nel seguito di questa lezione studieremo il comportamento di corpi estesi e rigidi.
Tra i corpi che non sono rigidi, è interessante studiare il comportamento di quelli che si definiscono corpi plastici e corpi elastici. Si dicono **corpi plastici** quelli che mantengono le deformazioni subite, anche quando vengono a mancare le forze che hanno prodotto la deformazione. Un blocco di plastilina è un buon esempio di questo comportamento, come il nome chiaramente indica.
Si chiamano invece **corpi elastici** quelli che riprendono la forma originale, quando cessano di agire le forze che ne avevano provocato una deformazione. Le molle, del cui comportamento abbiamo parlato nella lezione 15, sono un buon esempio di questa categoria di corpi.

18.3. Il moto di un corpo esteso e il centro di massa

Quando le forze che agiscono su un corpo rigido e puntiforme hanno risultante zero, allora è facile prevedere il moto del corpo: avverrà in linea retta, con velocità costante (insomma: sarà un moto rettilineo uniforme). Perciò, quando un corpo puntiforme scivola su una superficie liscia e piana, possiamo prevedere che il suo sarà un moto rettilineo e uniforme. Infatti le due sole forze che agiscono in questo caso sono il peso e la reazione vincolare (superficie liscia significa che non c'è attrito): essendo uguali e opposte la loro risultante è zero, quindi possiamo applicare la prima legge della dinamica. Se a scivolare è un corpo esteso, allora le cose sono più complicate (►fig.18.2a)
Se un corpo puntiforme cade, lo fa seguendo una traiettoria parabolica. Se a cadere è un corpo esteso, allora le cose sono più complicate (►fig.18.2b).



a) b)

Fig.18.2 a) Il punto bianco si muove di moto rettilineo uniforme
b) Il punto rosso cade con una traiettori parabolica.

Nell'immagine a) c'è un punto bianco che si muove di moto rettilineo uniforme, proprio come si muoverebbe la chiave inglese se tutta la sua massa venisse concentrata in quel punto. Nell'immagine b) c'è un punto rosso che cade lungo una traiettoria parabolica, proprio come si muoverebbe la tuffatrice se tutta la sua massa fosse concentrata in quel punto. Questo punto si chiama **centro di massa** del corpo che stiamo considerando. Quando consideriamo il peso del corpo, cioè la forza con cui esso è attratto verso il centro della Terra, possiamo trattarlo come un vettore applicato proprio in quel punto.
Il moto del centro di massa lungo una traiettoria rettilinea è un **moto di traslazione**. Il moto di tutti gli altri punti intorno al centro di massa è un **moto di rotazione**. Il moto complessivo della chiave inglese è una combinazione di questi due moti: se consideriamo un punto qualsiasi, esso trasla in linea retta e nel frattempo ruota intorno al centro di massa.

18.4. Il moto di rotazione

Una forza non bilanciata, applicata ad un corpo esteso, può causare rotazioni oltre che traslazioni. Se l'oggetto è libero, esso ruota intorno al suo centro di massa, come abbiamo visto nel paragrafo precedente. Se invece l'oggetto è fissato intorno ad un asse, allora ruoterà intorno a quell'asse. Una porta fissata sui cardini è un buon esempio di questa seconda situazione.
La rapidità con cui un corpo esteso ruota intorno ad un suo punto viene espressa tramite la **velocità angolare**, cioè la grandezza che misura l'angolo percorso nell'unità di tempo:

velocità angolare = angolo percorso / tempo impiegato

Le leggi di Newton per il moto di rotazione hanno la stessa forma di quelle che abbiamo già studiato per il moto di traslazione. La prima legge, in particolare, dice che in assenza di forze applicate la velocità di rotazione rimane costante. Un oggetto che non ruota, se nessuna forza agisce, continuerà a non ruotare. Un oggetto che ruota, se nessuna forza agisce (come nel caso della chiave inglese), continua a ruotare con la stessa velocità angolare.
Esaminate con attenzione la figura 18.2a: vedrete che l'angolo percorso dalla chiave tra un'immagine e l'altra è sempre lo stesso, quindi la velocità angolare è costante.

18.5. Stessa forza, effetti differenti

Per produrre un cambiamento di velocità angolare bisogna perciò che ci sia l'azione di una o più forze. Per valutare il loro effetto, tuttavia, dobbiamo conoscerne non solo le

intensità e le direzioni, ma anche i punti in cui agiscono. La stessa forza può produrre diversi effetti sul moto di rotazione, a seconda del punto in cui agisce.
Consideriamo una porta fissata sui cardini, ferma: per aprirla dobbiamo cambiare la sua velocità angolare, e per far questo ci serve naturalmente una forza. Se decidiamo di applicare una forza di 5 N sulla maniglia, il suo effetto dipende da come è orientata (►fig.18.3). L'effetto è nullo se la forza agisce in direzione del cardine (►fig.18.3a), è massimo se la forza agisce perpendicolarmente al piano della porta (►fig.18.3b).
Se la forza agisce perpendicolarmente alla porta, però a metà strada fra maniglia e cardine (►fig.18.3c), allora l'effetto è la metà di quello che si ottiene nel caso b).

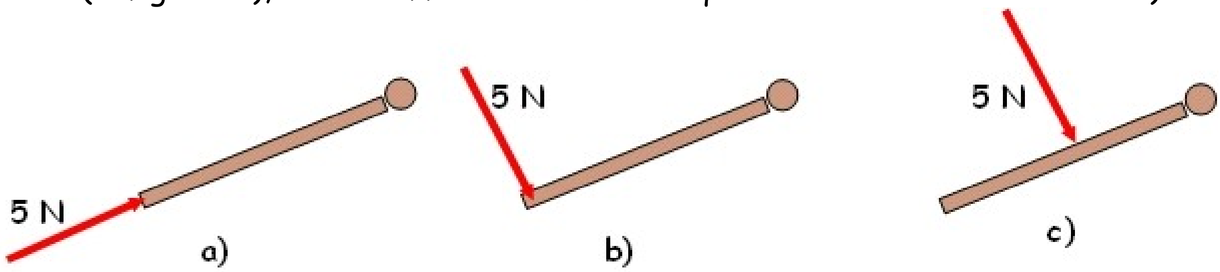


Fig.18.3 Una forza di 5 N viene applicata su una porta (vista dall'alto)
a) sulla maniglia, in direzione del cardine b) sulla maniglia, perpendicolarmente alla porta
c) a metà strada tra maniglia e cardine

18.6. Il momento di una forza

Per descrivere l'effetto di una forza sul moto di rotazione conviene introdurre una grandezza che tenga conto di tutti i fattori importanti: la sua intensità, la direzione in cui agisce, la distanza tra punto di applicazione e centro della rotazione.
Questa grandezza si chiama **momento della forza F**, si indica con il simbolo M, ed è il prodotto tra intensità della forza F e lunghezza b del **braccio**, cioè la distanza tra il centro di rotazione e la retta lungo la quale agisce la forza (►fig.18.4):

$$M = F \cdot b$$

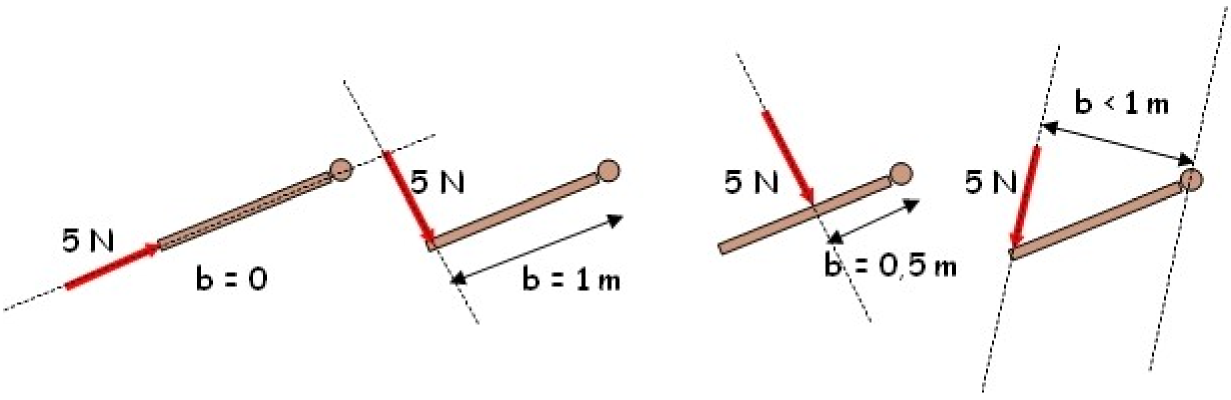


Fig.18.4 Calcolo del momento in differenti situazioni
a) M = 0 b) M = 5 N·m c) M = 2,5 N·m d) M < 2,5 N·m

Il momento di una forza si misura dunque in newton·metri (N·m). Abbiamo già incontrato una grandezza che si misura in newton·metri, cioè il lavoro: quando misuriamo un lavoro, però, questo prodotto di unità di misura viene denominato joule, quando invece misuriamo il momento di una forza lo esprimiamo semplicemente in N·m.

18.7. Il momento è un vettore

Il momento di una forza è una grandezza vettoriale, che quindi indicheremo con $\vec{M}$. Il modulo di $\vec{M}$, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, è il prodotto tra intensità della forza e lunghezza del braccio. La sua direzione è quella dell'asse intorno a cui avviene la rotazione. Il suo verso si può calcolare con la regola della mano destra: se curviamo le dita della mano destra nel senso in cui ruota il corpo rigido sotto l'azione di $\vec{F}$, allora il verso del momento è quello in cui punta il pollice (►fig.18.5).

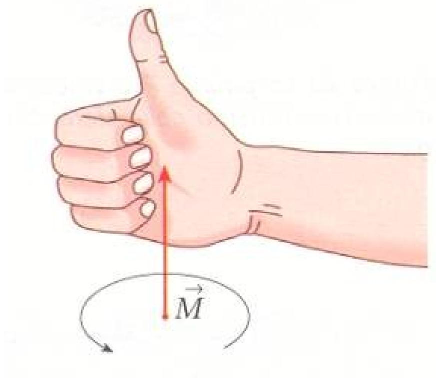


Fig.18.5 la regola della mano destra

Se più forze $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, … agiscono su uno stesso corpo, per ciascuna di esse possiamo calcolare il momento $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, $\vec{M}_3$, … Il momento risultante $\vec{M}$ si ottiene sommando i momenti con le regole che conosciamo per la somma dei vettori:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \ldots$$

18.8. Dove si trova il centro di massa?

Se un corpo è fatto di un solo materiale (quindi la sua densità è la stessa in ogni punto) ed ha una forma geometrica regolare, in alcuni casi è facile indovinare dove si trova il suo centro di massa: per una sfera è il centro, per un parallelogramma di lamiera è il punto di incontro delle diagonali, per un triangolo è il punto di incontro delle mediane… E se la forma è irregolare?
Ritagliate da un cartoncino una superficie di forma irregolare: la posizione del centro di massa si può trovare in modo semplice (►fig.18.6).

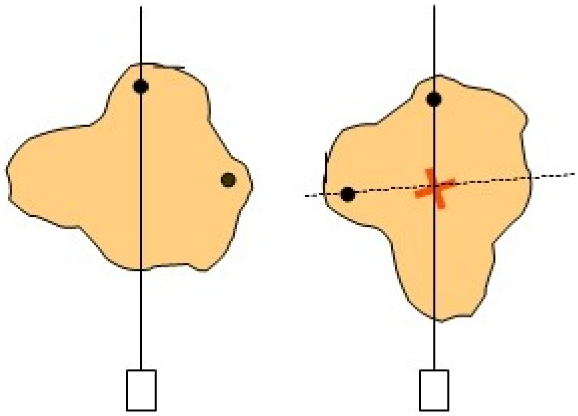


Fig.18.6

Ritagliate la superficie di forma irregolare, poi praticate due fori. Sospendete la superficie a ciascun foro, disegnando nei due casi la verticale che passa per il punto di sospensione (per trovare la verticale aiutatevi con un filo che ha un peso in fondo, cioè con un filo a piombo). Il centro di massa si trova nel punto di intersezione delle due rette, indicato con una x rossa.

Perché funziona questo metodo? Quando sospendete la superficie in un punto, il centro di massa deve trovarsi lungo la retta che ha la direzione del filo a piombo. Se la spostate, la forza peso che agisce nel centro di massa ha un momento rispetto al punto di sospensione: il suo effetto è una rotazione che riporta il centro di massa sulla verticale. Poiché il centro di massa si trova su entrambe le verticali, deve stare nel loro punto di intersezione.

18.9. La coppia di forze

Se molte forze agiscono su un corpo, e la loro risultante è zero, allora il centro di massa di quel corpo mantiene la propria velocità: se inizialmente essa era zero, continuerà ad essere zero. Questo ci basta per affermare che il corpo resta fermo? Purtroppo no: sappiamo che, anche nel caso di risultante nulla, esso può ruotare.
È proprio questo il caso che si verifica nel caso di una coppia di forze.
Una **coppia di forze** è costituita da due forze di uguale intensità, stessa direzione, verso opposto, rette d'azione differenti

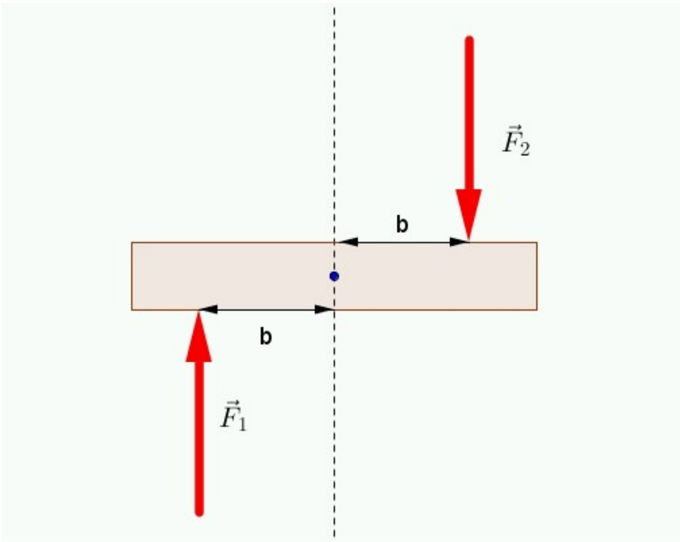


Fig.18.7 Una coppia di forze agisce sopra un'assicella, vista dall'alto

Le forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ che agiscono su un assicella come indicato nella figura (►fig.18.7) hanno la stessa intensità F, perciò la loro risultante è zero: di conseguenza il baricentro, evidenziato con un punto nero, non può muoversi.
I momenti $\vec{M}_1$ e $\vec{M}_2$ di queste due forze rispetto al baricentro, tuttavia, sono vettori di uguale intensità che puntano entrambi verso il basso. Il momento risultante della coppia, quindi è il vettore $\vec{M}_C = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$, anch'esso diretto verso il basso. Poiché

$$M_1 = F \cdot b \text{ e } M_2 = F \cdot b$$

il modulo M_C del momento risultante si calcola così:

$$M_C = M_1 + M_2 = F \cdot b + F \cdot b = F \cdot 2b$$

Dove 2b è il braccio della coppia, cioè la distanza tra le rette parallele lungo le quali agiscono le due forze.

18.10. L'equilibrio di un corpo esteso

Qual è la condizione che deve realizzarsi perchè anche le rotazioni siano impossibili? La risposta è semplice: occorre che anche il momento risultante sia nullo (►fig.18.8).

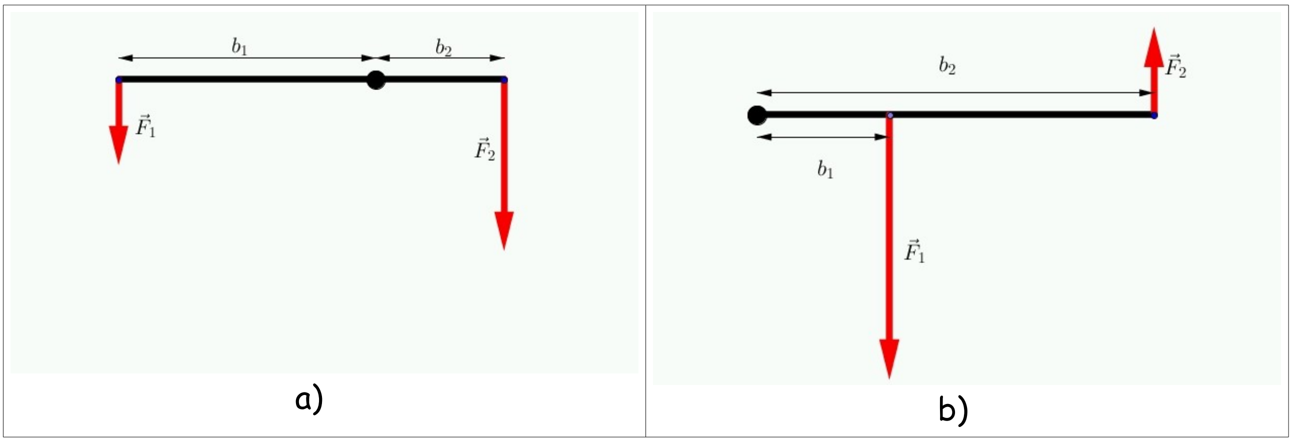


Fig.18.8 Qual è la condizione di equilibrio di una leva?
a) una leva di primo genere   b) una leva di secondo genere

La figura 18.8a mostra una cosiddetta **leva di primo genere**. Due forze con lo stesso verso, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, agiscono perpendicolarmente alla leva. I loro punti di applicazione si trovano da parti opposte rispetto dal punto intorno al quale può avvenire la rotazione (si chiama fulcro, come abbiamo visto nella lezione scorsa), e distano b_1 e b_2 da esso. La regola della mano destra ci dice che i loro momenti sono vettori opposti: $\vec{M}_1$ punta verso chi guarda la figura, $\vec{M}_2$ in verso opposto. Perché la rotazione sia impossibile è dunque necessario che i loro moduli siano uguali:

$$M_1 = M_2 \qquad \text{cioè} \qquad F_1 \cdot b_1 = F_2 \cdot b_2$$

La figura 18.8b mostra invece una **leva di secondo genere**. Due forze di verso opposto, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, agiscono perpendicolarmente alla leva, e i loro punti di applicazione, che si trovano dalla stessa parte rispetto al fulcro, distano b_1 e b_2 da esso. Anche in questo caso i momenti $\vec{M}_1$ e $\vec{M}_2$ hanno verso opposto, e la condizione di equilibrio non cambia:

$$M_1 = M_2 \qquad \text{cioè} \qquad F_1 \cdot b_1 = F_2 \cdot b_2$$

È interessante notare che questo risultato coincide con quello trovato nella lezione scorsa. Nel contesto di allora $F_1 \cdot b_1 = F_2 \cdot b_2$ significava $F_1 \cdot x_1 = F_2 \cdot x_2$, e cioè che il lavoro fatto a destra va tutto in un uguale aumento di energia potenziale a sinistra (rivedi la figura 15.3). Nel contesto attuale, la stessa relazione $F_1 \cdot b_1 = F_2 \cdot b_2$ significa che sono uguali i momenti esercitati dalle forze che agiscono sulle due estremità della leva. Parole diverse per descrivere una stessa, identica realtà.

18.11. Il ruolo della reazione vincolare

Esaminiamo ancora una volta la figura 18.8, perché sembra che qualcosa non funzioni. Se $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ hanno lo stesso verso, come in 18.8a, certamente la loro risultante non è zero. Anche nella situazione descritta in 18.8b la risultante non è zero: infatti i bracci sono diversi, e la condizione di equilibrio ci assicura che i moduli F_1 e F_2 **devono** essere diversi.
Ma allora come fa il centro di massa a restare fermo? Non dovremmo osservare un movimento di traslazione del centro di massa della leva?
Naturalmente no, e la spiegazione è molto semplice: abbiamo dimenticato che esiste la reazione vincolare, in questo caso esercitata dal perno che si trova nel fulcro della leva. La reazione vincolare $\vec{F}_R$ dovrà essere di intensità e verso tali da equilibrare l'azione di $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$: in tal modo le tre forze avranno risultante nulla, e questo spiega perché il centro di massa non trasla.
La prossima figura (►fig.18.9) mostra come sono dirette le reazioni vincolari del fulcro nelle due situazioni descritte in figura 18.8.

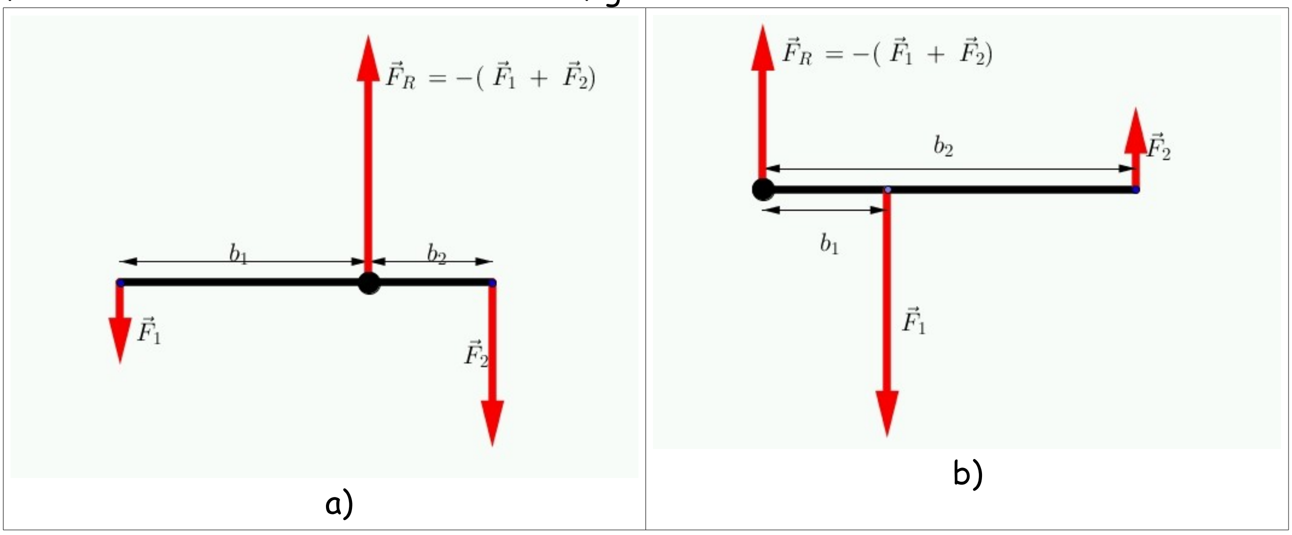


Fig.18.9 le reazioni vincolari del fulcro per le due leve descritte in figura 18.8
a) la reazione ha intensità $F_1 + F_2$ b) la reazione ha intensità $F_1 - F_2$