Lezione 29: Onde, pendoli, molle

29.1. Onde: oscillazioni che si propagano

Nelle precedenti lezioni abbiamo concentrato l'attenzione sul moto dei corpi materiali, cioè gli oggetti che hanno una massa. In un primo tempo ci siamo limitati allo studio dei punti materiali, cioè oggetti dei quali potevamo trascurare l'estensione, considerandoli quindi come i punti della geometria, nei quali è però concentrata una massa. Per descrivere il moto di un punto materiale ci basta rappresentarlo mediante una curva. Poi abbiamo preso in considerazione anche corpi estesi: abbiamo visto che la situazione si complica, perché dobbiamo considerare non solo le posizioni che assume un punto ma, via via, l'orientamento dell'intero corpo.

Il mondo in cui viviamo, tuttavia, è popolato da altre entità che si muovono, alle quali non sappiamo attribuire una massa. La luce del sole, per esempio, arriva fino a noi dopo aver compiuto un viaggio lungo 150 milioni di km, durato circa 8 minuti. La luce si muove, ma la luce, a quanto sembra, non ha una massa. Lo stesso possiamo dire del suono di uno strumento, che dalla buca dell'orchestra viaggia fino al nostro orecchio. O del segnale che dall'antenna di Portofino viaggia verso il ricevitore FM sintonizzato su Radio 3. Luce, suono, segnali FM: sono entità che certamente viaggiano nello spazio, ma alle quali non corrisponde un trasporto di materia, cioè di massa.

A tutte le entità di questa natura si dà il nome di onde.

Un'onda è una perturbazione che si propaga nello spazio e che può trasportare energia da un punto all'altro. Tale perturbazione è costituita dalla variazione di una grandezza fisica (es. variazione di pressione, temperatura, intensità del campo elettrico, posizione, ecc..)

Le variazioni più semplici da studiare sono le oscillazioni periodiche, per esempio le oscillazioni di posizione che subisce una massa collegata ad una molla, oppure un pendolo che viene allontanato dalla verticale.
Cominciamo quindi con l'approfondire la nostra conoscenza di questi fenomeni. Poi cercheremo di capire come le oscillazioni possano propagarsi nello spazio, dando quindi origine a un'onda.

29.2. Oscillazioni di un sistema massa - molla

Nella lezione 15 abbiamo imparato a calcolare la forza di richiamo che una molla esercita quando è deformata:

$$\vec{F} = -k \cdot \Delta\vec{x}$$

e l'energia potenziale che la molla immagazzina a seguito della deformazione subita:

$$E_{PE} = \tfrac{1}{2}k\cdot\Delta x^2$$

Siamo perciò in grado di descrivere il comportamento del sistema massa - molla schematizzato nella prossima figura (►fig.29.1).

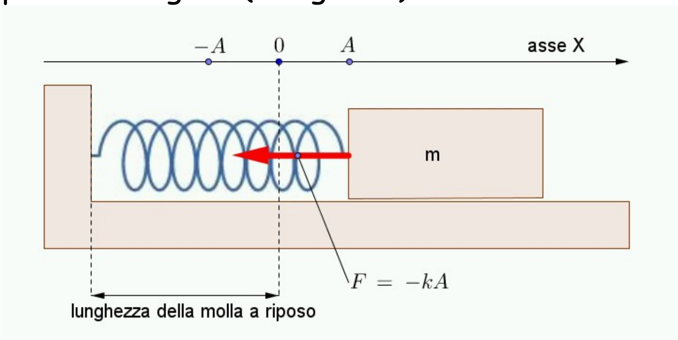


Fig.29.1 Condizione iniziale di un sistema massa - molla

L'oggetto di massa m può muoversi senza attrito sopra una guida orizzontale. E' collegato ad una molla di costante elastica k. La situazione iniziale è quella descritta in figura: la molla è stata allungata di un tratto A, e l'oggetto è mantenuto fermo da una forza che, evidentemente, contrasta la forza di richiamo che la molla esercita. L'asse delle ascisse è diretto verso destra, lo zero corrisponde alla posizione in cui si trova l'estremità destra della molla quando non è deformata, la posizione iniziale del corpo è quindi $x(0)=A$. E' facile descrivere quello che accade quando lasciamo il corpo libero di muoversi:

- il blocco di massa m, sottoposto alla forza di richiamo $F=-kA$, non resta fermo, ma comincia a muoversi verso sinistra con accelerazione $a=-kA/m$ (il segno meno ci ricorda che l'accelerazione, così come la forza, è diretta verso sinistra);
- raggiunge la posizione di equilibrio ($x=0$), ma non si ferma lì, perché prosegue a causa della sua inerzia;
- superata la posizione di equilibrio la molla comincia a comprimersi, quindi esercita una forza di richiamo diretta verso destra, che rallenta il moto del corpo;
- il corpo si arresta raggiunta la posizione $-A$, ma subito riparte, costretto da una forza $F=kA$ diretta verso destra, che produce un'accelerazione $a=kA/m$;
- e così via ...: siamo in presenza di un moto periodico.

29.3. Grafici tempo - posizione e tempo - velocità

E' facile tracciare il grafico tempo - posizione per il moto che abbiamo appena descritto (►fig.29.2)

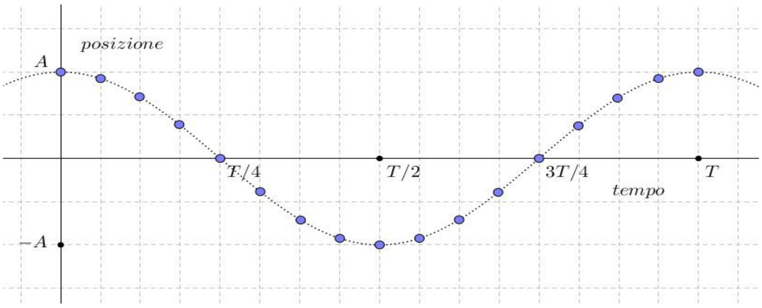


Fig.29.2 Il grafico tempo - posizione. A si chiama ampiezza, T periodo

A si chiama ampiezza dell'oscillazione, T (il minimo tempo dopo il quale le posizioni si ripresentano con l'identica successione) si chiama periodo. La funzione t → x(t) è quindi periodica di periodo T.
Anche le velocità si ripresentano secondo la stessa successione dopo un tempo minimo T: anche la funzione t → v(t) è periodica di periodo T. Al tempo 0 la velocità è 0, ed è negativa durante la prima metà del periodo, per poi tornare 0 e diventare positiva nella seconda metà del periodo. Ecco quindi l'aspetto del grafico tempo - velocità (►fig.29.3):

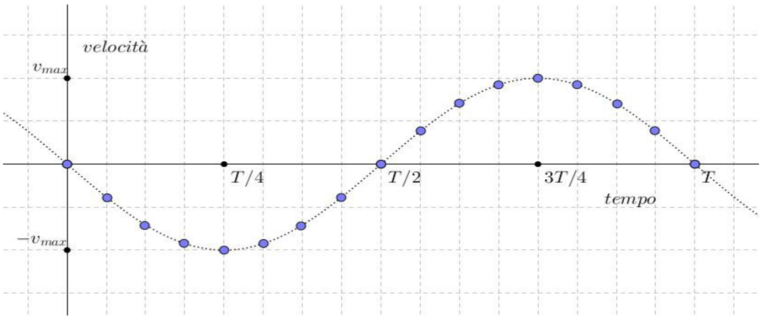


Fig.29.3 Il grafico tempo - velocità

Per sapere tutto sul grafico tempo - velocità ci basta sapere qual è la massima velocità che viene raggiunta nel corso dell'oscillazione. Basta tenere conto del fatto che l'energia si conserva: al centro della traiettoria l'energia è tutta cinetica, agli estremi è potenziale di tipo elastico, ma il valore non cambia. Quindi:

$$\tfrac{1}{2}k\cdot A^2 = \tfrac{1}{2}m\cdot {v_{max}}^2$$

Se risolviamo rispetto a v_{max} troviamo:

$$v_{max} = A\cdot\sqrt{(k/m)}$$

Il grafico dell'accelerazione lo ricaviamo facilmente da quello della posizione. All'istante 0 l'accelerazione è -kA/m, dopo un quarto di oscillazione è 0, dopo mezza oscillazione è kA/m, ... (►fig.29.4)

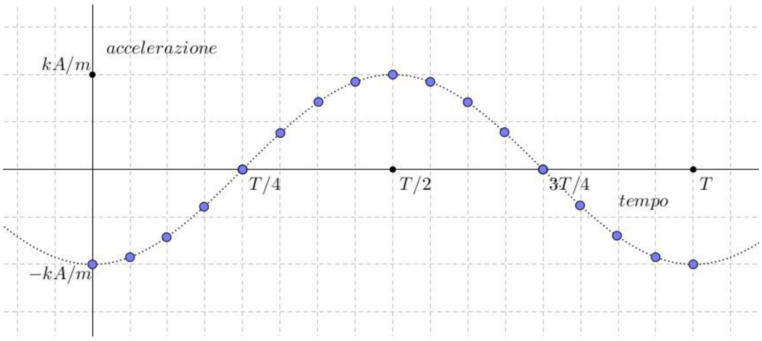


Fig.29.4 Il grafico tempo - accelerazione

Scelte in questo modo le condizioni iniziali (posizione iniziale pari ad A, velocità nulla), ci accorgiamo che possiamo descrivere l'andamento nel tempo delle tre grandezze posizione, velocità e accelerazione, usando tre funzioni trigonometriche.

- Per la posizione serve la funzione cos (moltiplicata per un fattore di scala A):

$$x(t)=A\cdot\cos(2\pi t/T)$$

  Che l'input della funzione cos debba essere il termine $2\pi t/T$ è facile da verificare: basta sostituire a t i valori 0 e T/2. Si trova $x(0)=A\cdot\cos(0)=A$ e $x(T/2)=A\cdot\cos(2\pi/2)=A\cdot\cos(\pi)=-A$. Sono proprio i valori giusti!

- Per la velocità serve la funzione −sin (moltiplicata per un fattore di scala $A\cdot\sqrt{(k/m)}$):

$$v(t)=-A\cdot\sqrt{(k/m)}\cdot\sin(2\pi t/T)$$

- Occorre infine la funzione −cos (moltiplicata per un fattore di scala $A\cdot(k/m)$) per l'accelerazione:

$$a(t)=-A\cdot(k/m)\cdot\cos(2\pi t/T)$$

29.4. Qual è il periodo di oscillazione?

Nel paragrafo precedente abbiamo indicato con T il periodo dell'oscillazione, ma non abbiamo detto nulla di come si possa calcolare T. Una cosa è certa: T deve dipendere, in un modo che ancora non sappiamo, dalle grandezze che caratterizzano il sistema: la massa m, l'ampiezza A dell'oscillazione, la costante k che descrive la rigidità della molla. Vi diciamo subito qual è il legame:

$$T = 2\pi\sqrt{(m/k)}$$

Come vedete, il periodo non dipende dall'ampiezza delle oscillazioni. E' un fatto che abbiamo già incontrato nella lezione 2, quando parlammo dell'isocronismo delle oscillazioni di un pendolo.

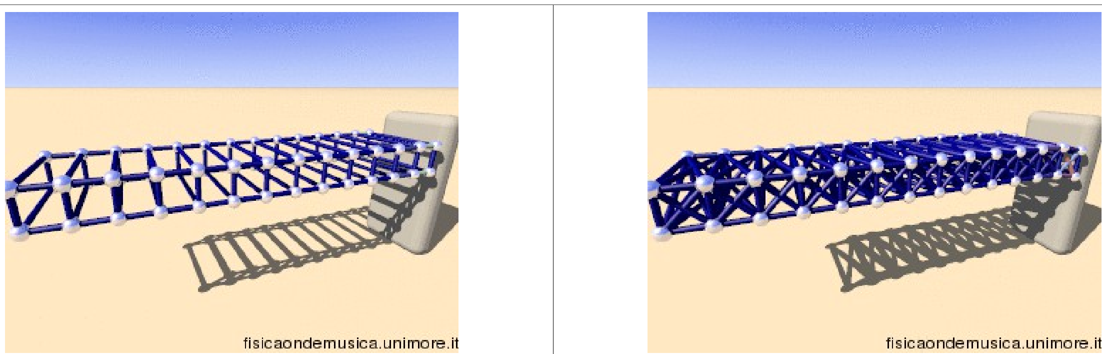
Perché il legame sia proprio questo, lo si può capire in diversi modi:

- possiamo fare un'analisi dimensionale. Se vogliamo ottenere un tempo, non c'è altro modo di combinare le grandezze A, m e k: bisogna fare la radice del termine m/k (provate per esercizio). L'analisi dimensionale, tuttavia, non vi dice perché la costante sia proprio 2π. Potrebbe essere qualunque altro numero.
- Possiamo ricorrere ad una simulazione (vedi la scheda di approfondimento)
- Se sapete derivare funzioni si ricava subito la formula corretta, compreso il fattore 2π. Se la cosa non vi è chiara, non preoccupatevi: si tratta solo di imparare abbastanza matematica! Per chi le cose le sa già:
  - chiamiamo pulsazione il termine $\omega=2\pi/T$
  - allora $x(t)=A\cos(\omega t)$
  - la velocità è la derivata della posizione: $v(t)=-A\omega\sin(\omega t)$
  - l'accelerazione è la derivata della velocità: $a(t)=-A\omega^2\cos(\omega t)$
  - però sappiamo che $a(t)=-A(k/m)\cos(\omega t)$
  - quindi $\omega^2=k/m$, cioè $\omega=\sqrt{(k/m)}$, cioè $2\pi/T=\sqrt{(k/m)}$, cioè $T= 2\pi\sqrt{(m/k)}$

29.5. Come si propaga l'oscillazione?

Un'oscillazione in un punto dello spazio può provocare oscillazioni della stessa natura in punti vicini dello spazio, le quali a loro volta provocano oscillazioni dello stesso tipo un po' più in là, e così via ... Diciamo allora che l'oscillazione si propaga, dando origine ad un'onda.

Nel caso che l'oscillazione sia quella di un sistema massa - molla, per spiegare come l'oscillazione si propaghi conviene considerare le immagini che seguono (►fig.29.5), più espressive di molte parole.



a) b)

Fig.29.5 Propagazione di un'onda: a) longitudinale b) trasversale (CLICCA)

L'onda della figura a) si chiama longitudinale: ciò significa che in ogni punto dello spazio l'oscillazione ha la stessa direzione di propagazione dell'onda. L'onda della figura b) si chiama trasversale: la direzione di ciascuna oscillazione è perpendicolare a quella di propagazione dell'onda.

Nel caso del suono il meccanismo di propagazione è analogo: la corda del violino oscilla, e trasmette l'oscillazione alle molecole dell'aria che la circondano. Esse, a loro volta, trasmettono l'oscillazione alle molecole che si trovano un po' più in là, e così via ... Vedremo nella lezione 30, dedicata al suono, che le onde sonore sono longitudinali: le molecole oscillano nella stessa direzione di propagazione dell'onda.

29.6. Ancora sul pendolo

E' stato faticoso ricavare le equazioni del moto per il sistema massa - molla, ma ora ci attende un premio: possiamo usare le stesse equazioni per descrivere il moto di un pendolo. A prima vista ciò può suonare strano: la traiettoria del sistema massa - molla è un segmento di retta, quella di un pendolo è un arco di circonferenza. Ma se ci limitiamo a considerare piccole oscillazioni, allora possiamo approssimare l'effettiva traiettoria del pendolo con il segmento della relativa tangente nel suo punto medio. La prossima immagine (►fig.29.6), chiarisce bene il concetto.

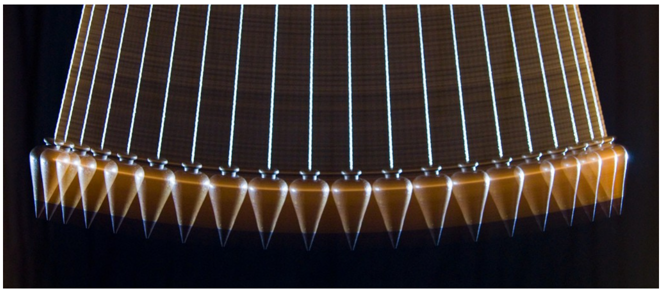


Fig.29.6 Foto stroboscopica dell'oscillazione di un pendolo

La lunghezza del filo di sospensione è molto grande rispetto alla lunghezza della traiettoria. Di conseguenza la traiettoria è quasi rettilinea. Quanto più lungo è il filo, tanto più possiamo considerare rettilinea la traiettoria. Niente di strano, quindi, se nel limite di piccole oscillazioni possiamo usare le stesse equazioni del moto.
In particolare possiamo domandarci quale sarà il periodo di oscillazione. Le grandezze caratteristiche, in questo caso, sono la lunghezza del filo e l'accelerazione di gravità g. Attenzione: l'accelerazione di gravità g, non la massa m! Come sappiamo, il moto di caduta non dipende dalla massa che cade, ma solo da g.
Come nel caso del sistema massa - molla, il periodo è indipendente dall'ampiezza dell'oscillazione (entro certi limiti, naturalmente: abbiamo detto che l'oscillazione deve avere una piccola ampiezza).
C'è un solo modo di combinare l e g ottenendo un tempo: dobbiamo calcolare il termine $\sqrt{(l/g)}$. Otteniamo quindi:

$$T = 2\pi\sqrt{(l/g)}$$