La matematica della propagazione ondosa

Profilo spaziale e andamento temporale di un'onda

Riprendiamo in considerazione la figura 30.1. Nella prima parte si vede il profilo spaziale di un'onda, cioè il modo in cui la grandezza che oscilla si distribuisce nello spazio, avendo fissato un ben preciso istante di tempo. Nella seconda parte se ne vede l'andamento temporale, cioè come la grandezza che oscilla cambia nel corso del tempo, avendo fissato un ben preciso punto nello spazio.

In questo approfondimento vogliamo integrare le due descrizioni: vogliamo cioè descrivere in che modo il profilo spaziale dell'onda si sposta nello spazio al trascorrere del tempo.

Per semplificare la descrizione stiamo trattando di un'onda unidimensionale: potrebbe trattarsi, per esempio, di un'onda sinusoidale che si propaga su di una corda infinitamente lunga. Tutto ciò che diremo, tuttavia, si può facilmente generalizzare al caso tridimensionale.

Scegliendo opportunamente come origine un punto sulla retta e un particolare istante di tempo, possiamo realizzare le due descrizioni usando funzioni coseno, come in effetti è stato fatto in figura 30.1:

$A(x) = A\cdot\cos(2\pi x/\lambda) = A\cdot\cos(kx)$ dove $k = 2\pi/\lambda$ si chiama numero d'onda

$A(t) = A\cdot\cos(2\pi t/T) = A\cdot\cos(\omega t)$ dove $\omega = 2\pi/T$ si chiama pulsazione

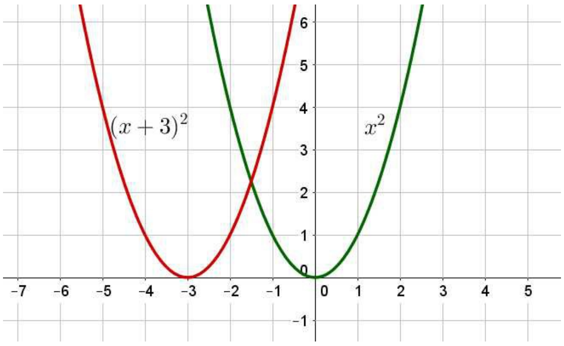
La pulsazione rappresenta in pratica il numero di periodi contenuti in un intervallo temporale di 2π secondi, il numero d'onda rappresenta invece il numero di lunghezze d'onda contenute in un intervallo spaziale di 2π metri.

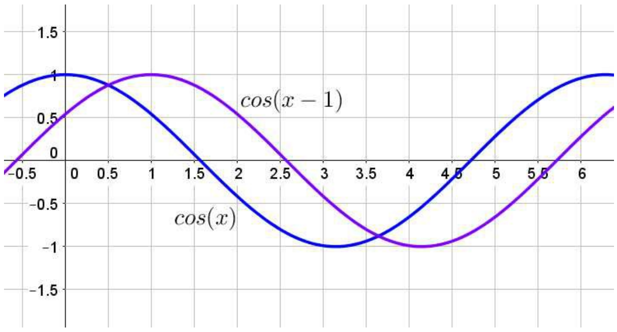
La matematica della traslazione

Partiamo dal profilo spaziale $A(x) = A\cdot\cos(2\pi x/\lambda) = A\cdot\cos(kx)$, e vediamo in che modo si possa descrivere la sua propagazione al trascorrere del tempo.

Ci viene in soccorso quel che abbiamo imparato nel corso di matematica: noto il grafico della funzione $x \to f(x)$, allora la funzione $x \to f(x-h)$ ha lo stesso grafico, traslato orizzontalmente di un tratto pari ad h. La cosa è ovvia, ma vogliamo comunque ricordarla con l'aiuto della prossima immagine. La funzione scelta è la funzione quadrato, per il passo orizzontale della traslazione abbiamo scelto $h = -3$.

A fianco applichiamo la stessa idea al grafico della funzione coseno. Questa volta abbiamo scelto h = 1.





Una traslazione che dipende dal tempo

Se vogliamo che il profilo spaziale dell'onda trasli nel tempo a velocità costante, basta allora che il passo h della traslazione sia proporzionale al tempo: $h = v \cdot t$, dove v è la velocità con cui il profilo si sposta, quindi la velocità con cui l'onda si propaga.

Se il profilo fermo è descritto dalla funzione $A(x) = A \cdot \cos(kx)$, la sua propagazione con velocità v è descritta dalla funzione

$$A(x,t) = A \cdot \cos(k(x-vt)) = A \cdot \cos(kx-kvt)$$

Se poniamo x = 0 troviamo:

$$A(0,t) = A \cdot \cos(0-kvt) = A \cdot \cos(kvt)$$

dove l'ultima uguaglianza discende dal fatto che la funzione coseno è pari, cioè il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate. Ora si tratta di confrontare il risultato appena ottenuto con quello che già sappiamo. Abbiamo già definito l'andamento temporale in termini della pulsazione ω, cioè:

$$A(t) = A \cdot \cos(\omega t)$$

Il confronto delle due ultime equazioni ci assicura che:

$$k \cdot v = \omega \quad \rightarrow \quad v = \frac{\omega}{k} \quad \rightarrow \quad v = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \quad \rightarrow \quad v = \frac{\lambda}{T}$$

Il risultato ci conforta: significa che la velocità di propagazione è proprio data dal rapporto tra la lunghezza d'onda e il periodo, così come affermato nel corso della lezione 30. In conclusione possiamo scrivere l'equazione d'onda in questo modo:

$$A(x,t) = A \cdot \cos(kx-\omega t)$$

Esercizi

1. Un piccolo esercizio per consolidare quanto appreso. Un'onda è descritta dalla seguente equazione:

$$y(x,t) = 0.2\ \text{m} \cdot \cos\left(1.57\ \text{m}^{-1} \cdot x - 0.628\ \text{s}^{-1} \cdot t\right).$$

Calcolate:

(a) l'ampiezza dell'onda;
(b) il numero d'onda;
(c) la pulsazione;
(d) la lunghezza d'onda;
(e) il periodo;
(f) la frequenza;
(g) la velocità di propagazione;
(h) la direzione di propagazione.

Inoltre:

(i) fate uno schizzo accurato del profilo dell'onda all'istante $t = 0$;
(j) fate uno schizzo accurato del profilo dell'onda all'istante $t = 1$ s.

2. Mostrate che l'equazione d'onda $A(x,t) = A \cdot \cos(kx - \omega t)$ si può riscrivere in ciascuna di queste forme equivalenti:

(a) $A(x,t) = A \cdot \cos[k(x - vt)]$
(b) $A(x,t) = A \cdot \cos[\omega(x/v - t)]$
(c) $A(x,t) = A \cdot \cos[2\pi(x/\lambda - vt)]$
(d) $A(x,t) = A \cdot \cos[2\pi(x/\lambda - t/T)]$