# Lezione 33: Approfondimenti

Vogliamo dimostrare che angolo di incidenza e angolo di riflessione devono essere uguali, se imponiamo che il cammino da A a B abbia lunghezza minima. Prendiamo 2 punti A e B ugualmente distanti dallo specchio (►fig.33.app.1). Sia d tale distanza, e sia D la distanza tra A e B. Consideriamo un raggio di luce che viaggi da A a B in modo che la proiezione sullo specchio del raggio incidente abbia lunghezza x, la proiezione del raggio riflesso, quindi, abbia lunghezza D−x.

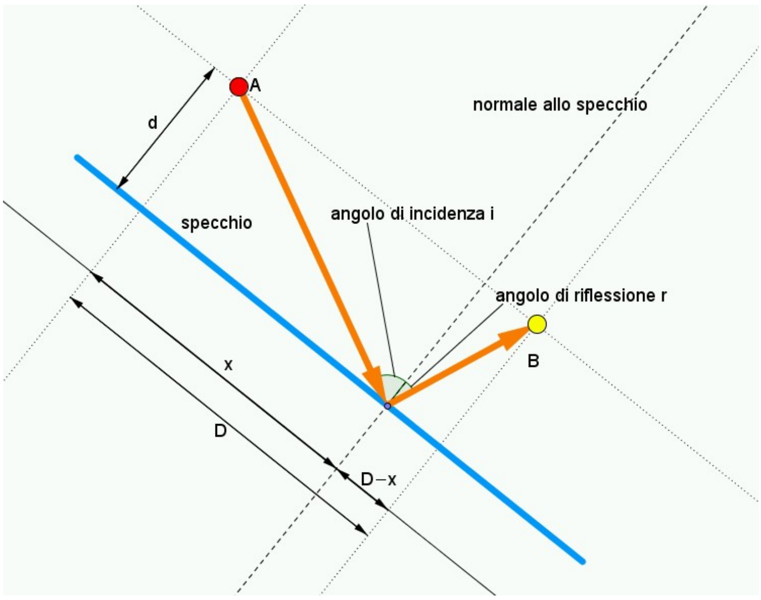


Fig.33.app.1 un possibile cammino da A a B

Il cammino da A a B ha una lunghezza L che è facile calcolare:

$$L = \mathrm{sqrt}(d^2 + x^2) + \mathrm{sqrt}(d^2 + (D - x)^2) = L(x)$$

In questo modo L è una funzione di x. Infatti abbiamo fissato i valori di d e D, e ci domandiamo come varia la lunghezza del cammino al variare del punto di incidenza sullo schermo. In particolare ci domandiamo quando accade che il cammino abbia valore minimo. Il minimo della funzione L, se esiste, deve capitare in corrispondenza di un valore di x per cui si annulla la derivata di L. Cominciamo quindi col calcolare la derivata di L. Si trova:

$$L'(x) = -(D - x)/\mathrm{sqrt}(d^2 + (D - x)^2) + x/\mathrm{sqrt}(d^2 + x^2)$$

I dettagli della derivazione sono raccolti, passo dopo passo, nella prossima tabella (►tab.33.app.1). Il calcolo è stato fatto con WolframAlpha: come si vede è necessario un buon numero di passi. Il problema è quindi: quando si annulla L'? Potremmo risolvere l'equazione L'(x) = 0 (fatelo per esercizio!). Tuttavia qualche sospetto ce l'abbiamo: *dovrebbe* annullarsi quando x = D/2. Ci accontentiamo quindi di verificare che L'(D/2) è davvero zero, come si vede in un attimo.

Possible derivation:

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{d^2+x^2}+\sqrt{d^2+(D-x)^2}\right)$$

Differentiate the sum term by term:

$$=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{d^2+(D-x)^2}\right)+\frac{d}{dx}\left(\sqrt{d^2+x^2}\right)$$

Using the chain rule, $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{d^2+(D-x)^2}\right)=\frac{d\sqrt{u}}{du}\,\frac{du}{dx}$, where $u=d^2+(D-x)^2$ and $\frac{d}{du}\left(\sqrt{u}\right)=\frac{1}{2\sqrt{u}}$:

$$=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{d^2+x^2}\right)+\boxed{\frac{\frac{d}{dx}\left(d^2+(D-x)^2\right)}{2\sqrt{d^2+(D-x)^2}}}$$

Differentiate the sum term by term:

$$=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{d^2+x^2}\right)+\frac{\boxed{\frac{d}{dx}(d^2)+\frac{d}{dx}\left((D-x)^2\right)}}{2\sqrt{d^2+(D-x)^2}}$$

The derivative of $d^2$ is zero:

$$=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{d^2+x^2}\right)+\frac{\frac{d}{dx}\left((D-x)^2\right)+\boxed{0}}{2\sqrt{d^2+(D-x)^2}}$$

Simplify the expression:

$$=\frac{\frac{d}{dx}\left((D-x)^2\right)}{2\sqrt{d^2+(D-x)^2}}+\frac{d}{dx}\left(\sqrt{d^2+x^2}\right)$$

Using the chain rule, $\frac{d}{dx}\left((D-x)^2\right)=\frac{du^2}{du}\,\frac{du}{dx}$, where $u=D-x$ and $\frac{d}{du}\left(u^2\right)=2u$:

$$=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{d^2+x^2}\right)+\frac{\boxed{2\,(D-x)\,\frac{d}{dx}(D-x)}}{2\sqrt{d^2+(D-x)^2}}$$

Simplify the expression:

$$=\frac{(D-x)\left(\frac{d}{dx}(D-x)\right)}{\sqrt{d^2+(D-x)^2}}+\frac{d}{dx}\left(\sqrt{d^2+x^2}\right)$$

Differentiate the sum term by term and factor out constants:

$$=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{d^2+x^2}\right)+\frac{(D-x)\boxed{\frac{d}{dx}(D)-\frac{d}{dx}(x)}}{\sqrt{d^2+(D-x)^2}}$$

The derivative of $D$ is zero:

$$=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{d^2+x^2}\right)+\frac{(D-x)\left(-\left(\frac{d}{dx}(x)\right)+\boxed{0}\right)}{\sqrt{d^2+(D-x)^2}}$$

Simplify the expression:

$$=-\frac{(D-x)\left(\frac{d}{dx}(x)\right)}{\sqrt{d^2+(D-x)^2}}+\frac{d}{dx}\left(\sqrt{d^2+x^2}\right)$$

The derivative of $x$ is 1:

$$=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{d^2+x^2}\right)-\frac{\boxed{1}\,(D-x)}{\sqrt{d^2+(D-x)^2}}$$

Using the chain rule, $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{d^2+x^2}\right)=\frac{d\sqrt{u}}{du}\,\frac{du}{dx}$, where $u=d^2+x^2$ and $\frac{d}{du}\left(\sqrt{u}\right)=\frac{1}{2\sqrt{u}}$:

$$=-\frac{D-x}{\sqrt{d^2+(D-x)^2}}+\boxed{\frac{\frac{d}{dx}\left(d^2+x^2\right)}{2\sqrt{d^2+x^2}}}$$

Differentiate the sum term by term:

$$=-\frac{D-x}{\sqrt{d^2+(D-x)^2}}+\frac{\boxed{\frac{d}{dx}(d^2)+\frac{d}{dx}(x^2)}}{2\sqrt{d^2+x^2}}$$

The derivative of $d^2$ is zero:

$$=-\frac{D-x}{\sqrt{d^2+(D-x)^2}}+\frac{\frac{d}{dx}(x^2)+\boxed{0}}{2\sqrt{d^2+x^2}}$$

Simplify the expression:

$$=-\frac{D-x}{\sqrt{d^2+(D-x)^2}}+\frac{\frac{d}{dx}(x^2)}{2\sqrt{d^2+x^2}}$$

Use the power rule, $\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=n\,x^{n-1}$, where $n=2$: $\frac{d}{dx}\left(x^2\right)=2\,x$:

$$=-\frac{D-x}{\sqrt{d^2+(D-x)^2}}+\frac{\boxed{2\,x}}{2\sqrt{d^2+x^2}}$$

Simplify the expression:

Answer:

$$=-\frac{D-x}{\sqrt{d^2+(D-x)^2}}+\frac{x}{\sqrt{d^2+x^2}}$$

Computed by Wolfram|Alpha

Tab.33.app.1 derivazione passo passo della funzione L(x), fatta con WolframAlpha

Passiamo ora al caso della rifrazione. Vogliamo dimostrare che i seni degli angoli di incidenza e di rifrazione devono essere proporzionali alle velocità della luce nei rispettivi mezzi, se imponiamo che il viaggio della luce da A a B abbia durata minima. Prendiamo 2 punti A e B ugualmente distanti dalla superficie di separazione tra aria e vetro (►fig.33.app.2). Sia d tale distanza, e sia D la distanza tra A e B nella direzione della superficie di separazione. Consideriamo un raggio di luce che viaggi da A a B in modo che la proiezione del raggio incidente sulla superficie abbia lunghezza x, la proiezione del raggio rifratto, quindi, abbia lunghezza D−x.

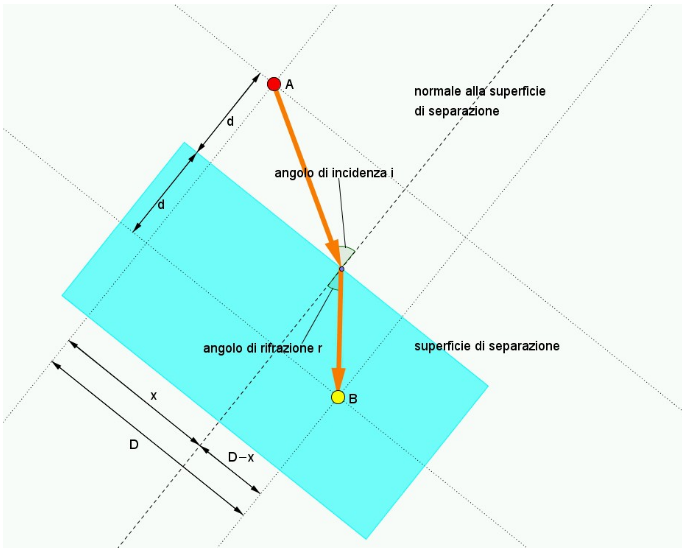


Fig.33.app.2 un possibile cammino da A a B

Il cammino da A a B ha una lunghezza L che è facile calcolare:

$$L = sqrt(d^2 + x^2) + sqrt(d^2 + (D - x)^2) = L(x)$$

A noi interessa il tempo che la luce impiega nel percorrere questo cammino. Il primo tratto viene percorso a velocità $v_{inc}$, il secondo a velocità $v_{rif}$: il tempo impiegato è:

$$t(x) = sqrt(d^2 + x^2)/v_{inc} + sqrt(d^2 + (D - x)^2)/v_{rif}$$

Come prima, dobbiamo cercare il valore di x che rende minimo il valore di t(x): si tratta di derivare la funzione t. La derivata sarà la stessa di prima, ogni addendo però è diviso per la rispettiva velocità:

$$t'(x) = - (D - x)/sqrt(d^2 + (D - x)^2)/v_{rif} + x/sqrt(d^2 + x^2)/v_{inc}$$

La derivata deve essere zero. Questa volta, però, non ci conviene risolvere rispetto a x, ma conviene osservare che il termine $x/sqrt(d^2 + x^2)$ è il seno dell'angolo di incidenza, mentre il termine $(D - x)/sqrt(d^2 + (D - x)^2)$ è il seno dell'angolo di rifrazione. Otteniamo quindi:

$$sin(i)/v_{inc} = sin(r)/v_{rif}$$

che è proprio il risultato da dimostrare.