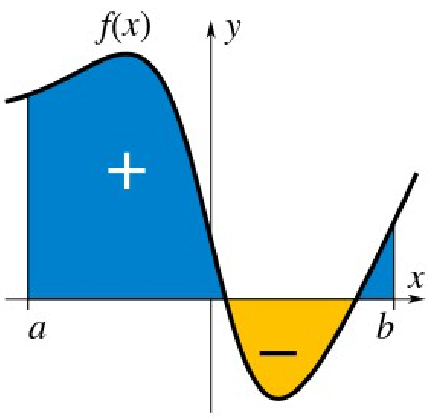
Campo e potenziale: la formula fondamentale del calcolo

La formula fondamentale del calcolo

Richiamiamo brevemente uno dei contenuti più importanti del corso di matematica: il legame tra derivazione e integrazione, espresso dalla formula che dà il titolo a questo paragrafo.
Sappiamo che integrare una funzione significa calcolare l'area orientata compresa tra il suo grafico e l'asse delle ascisse, in un tratto che vada per esempio da un punto iniziale a fino a un punto finale b, come mostrato in figura.



L'area si indica con il simbolo seguente:

$$\int_a^b f(x)dx$$

La formula fondamentale del calcolo permette di calcolare l'integrale come differenza tra due valori di un'antiderivata F(x):

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Il fatto che F sia un'antiderivata di f significa che $D_x F(x) = f(x)$, cioè che f è la derivata di F.

Un vecchio esempio: velocità e posizione

Nelle lezioni 8 e 9, e nel successivo approfondimento, abbiamo incontrato un primo esempio di grandezze che si comportano nel modo appena descritto. La variabile di input era in questo caso il tempo t, la funzione f era la velocità di un corpo che si muove in linea retta, la funzione F la sua posizione rispetto a un'origine arbitraria. La velocità v è la derivata rispetto al tempo della posizione S. L'area compresa tra il grafico di v e l'asse del tempo, tra due istanti assegnati, rappresenta la variazione di posizione che il corpo subisce durante quell'intervallo di tempo. Tutto ciò è riassunto in simboli nella prossima tabella:

velocità	posizione
$v(t) = D_t S(t)$	$S(t)$
$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = S(t_2) - S(t_1)$	

L'esempio nuovo: campo e potenziale

Nel corso della lezione 37 abbiamo incontrato una situazione del tutto analoga. La variabile di input è la distanza r rispetto alla sorgente del campo, la funzione f è il campo lungo una certa direzione, la funzione F il potenziale lungo quella direzione. Il campo E è l'opposto della derivata rispetto a r del potenziale V. L'area compresa tra il grafico di E e l'asse orizzontale, tra due punti assegnati, rappresenta la differenza di potenziale tra i due punti. La tabella che riassume la situazione è analoga alla precedente:

campo	potenziale
$E(r) = - D_r V(r)$	$V(r)$
$\int_{r_1}^{r_2} E(r)\,dr = -\,[V(r_2) - V(r_1)]$	

L'unica differenza, come si può notare, consiste in un segno meno: il vettore velocità punta nella direzione in cui la posizione cresce, il vettore campo punta invece nella direzione in cui il potenziale diminuisce.

La formula per il potenziale di una carica puntiforme

Nella lezione 36 abbiamo imparato a calcolare il campo che una carica puntiforme positiva Q, posta per esempio nell'origine O, provoca in un punto P distante r. Il campo ha la stessa direzione del vettore **OP**, e il suo modulo è $E = KQ/r^2$. L'antiderivata più semplice della funzione KQ/r^2 è la funzione $-KQ/r$. Poiché vogliamo che il campo sia l'opposto della derivata del potenziale ricaviamo quindi la formula che conosciamo:

$$V(r) = KQ/r$$

Per il potenziale gravitazionale della Terra si trova naturalmente una formula del tutto simile:

$$V(r) = - GM_T/r$$

Derivando rispetto a r il termine $- GM_T/r$ troviamo proprio GM_T/r^2, cioè il campo gravitazionale a distanza r dal centro della Terra.
Entrambe le formule, quella elettrica e quella gravitazionale, sono strutturate in modo che il potenziale si annulli a distanza infinita dalla sorgente.

Notate che negli esercizi sulla lezione 37, in particolare nei numeri da 33 a 37, abbiamo usato un'antiderivata più complicata: $V(r) = - GM_T/r + GM_T/R_T$. Con questa scelta dell'antiderivata il potenziale si annulla sulla superficie della Terra, proprio come il termine approssimato mgh.