Lezione 41: L'intensità del campo magnetico

41.1. L'interazione tra fili paralleli

Nella scorsa lezione ci siamo limitati a descrivere la direzione del campo magnetico, in particolare del campo generato da un lungo filo rettilineo e da un solenoide lungo e compatto. Per farlo ci siamo serviti di strumenti quali bussole e limatura di ferro, capaci di orientarsi secondo la direzione del campo.

In questa lezione vogliamo dare una descrizione quantitativa del campo magnetico B: in particolare impareremo a calcolarne l'intensità, note le sorgenti e la distanza rispetto ad esse. In questa lezione compariranno perciò gli ingredienti tipici di una descrizione quantitativa: numeri, formule, unità di misura.

E' abbastanza facile verificare sperimentalmente che due lunghi fili paralleli, percorsi da corrente, esercitano un'azione reciproca l'uno sull'altro. L'azione è attrattiva se le correnti circolano nella stessa direzione, repulsiva se circolano in direzioni opposte. Se non riuscite a realizzare l'esperimento da soli, potete guardare su youtube come si potrebbe fare, ad esempio esplorando questo link:

https://www.youtube.com/watch?v=kapi6ZDvoRs

In ogni caso, ecco un'immagine (►fig.41.1) che descrive la situazione, fornendone nel frattempo una chiave di interpretazione:

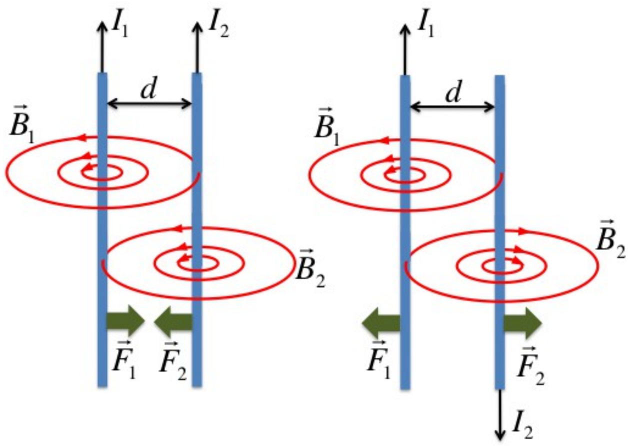

fig.41.1 forza tra due lunghi fili paralleli percorsi da corrente
L'immagine suggerisce l'idea che ciascun filo è immerso nel campo magnetico generato dall'altro.

La forza reciproca tra i due fili è proporzionale alla loro lunghezza l e alle correnti I_1 e I_2 che circolano in ciascuno di essi; inoltre essa è inversamente proporzionale alla distanza d che separa i due fili. Chiamata k la costante di proporzionalità si ha:

$$F = k i_1 i_2 l/d$$

La costante di proporzionalità vale: $k = 2 \cdot 10^{-7}$ N/A^2. Attenzione: il valore di k è esatto! Come vedremo più avanti, la definizione dell'unità ampere è fatta in modo che k abbia esattamente questo valore.

Si usa poi definire una nuova costante μ_0, 2π volte più grande di k, che si chiama "permeabilità magnetica del vuoto": $\mu_0 = 2\pi k = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2.

Le ragioni che suggeriscono di definire questa ulteriore costante sono del tutto analoghe a quelle che portarono a definire la permittività del vuoto $\varepsilon_0 = 1 / 4\pi K$ (vedi lezione 35): in questo caso il fattore moltiplicativo 2π è dovuto al fatto che l'azione del campo magnetico creato da un filo si estende lungo tutta una circonferenza lunga $2\pi d$, dove d è la distanza a cui si trova l'altro filo.

Il Bureau Internazionale dei Pesi e delle Misure ha deciso di chiamare le due costanti con nomi più immediati: ε_0 si chiama ora semplicemente "costante elettrica" e μ_0 "costante magnetica". D'ora in avanti seguiremo anche noi questa indicazione.

L'equazione della forza con cui interagiscono due lunghi fili paralleli diventa quindi:

$$F = \mu_0 i_1 i_2 l/(2\pi d)$$

41.2. Un confronto tra interazioni

Nella prossima tabella mettiamo a confronto quello che abbiamo imparato a proposito delle tre interazioni che abbiamo fin qui considerato: prima quella gravitazionale, poi quella elettrica, infine quella magnetica.

Forza	Formula	Costante
gravitazionale, tra due masse sferiche i cui centri hanno distanza r	$F = Gm_1m_2/r^2$	$G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 (valore misurato)
elettrica tra due cariche sferiche i cui centri hanno distanza r	$F = Q_1Q_2/4\pi\varepsilon_0 r^2$	$\varepsilon_0 = 8.85... \cdot 10^{-12}$ C^2/Nm^2 (valore esatto)
magnetica tra due fili paralleli di grande lunghezza l posti a una piccola distanza d	$F = \mu_0 i_1 i_2 l/(2\pi d)$	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2 (valore esatto)

Notiamo che le prime due formule hanno esattamente la stessa struttura: la forza di interazione è proporzionale al prodotto delle sorgenti diviso il quadrato della loro distanza. L'analogia deriva dal fatto che in entrambi i casi le sorgenti del campo (distribuzione sferica di massa e distribuzione sferica di carica) si possono ridurre a punti: basta concentrare tutta la massa e tutta la carica nei centri delle rispettive distribuzioni.

La terza formula ha una struttura diversa: la forza di interazione è proporzionale al prodotto delle sorgenti (le correnti) moltiplicato per la loro lunghezza e diviso per la loro distanza. La differenza consiste nel fatto che le sorgenti del campo sono in questo caso delle correnti: non possiamo ridurle ad un punto, ma per forza di cose si estendono nello spazio per una lunghezza l, che per giunta deve essere grande rispetto alla distanza d.

41.3. Definiamo l'intensità del campo magnetico

Scegliamo uno dei due fili, diciamo il filo 1, e riscriviamo l'espressione che permette di calcolare la forza F_1 cui esso è sottoposto:

$$F_1 = [\mu_0 i_2/(2\pi d)]\cdot[i_1]\cdot[l]$$

La formula dice che la forza subita dal filo 1 è proporzionale alla lunghezza del filo, alla corrente che lo attraversa, e ad un terzo termine che dipende dalla corrente che passa nell'altro filo (oltre che dalla sua distanza). Questo terzo termine lo definiamo "campo generato dal filo 2 ad una distanza d":

$$B_2 = \mu_0 i_2/(2\pi d)$$

Quindi possiamo dire che la forza subita dal filo 1 è: $F_1 = B_2 i_1 l$.

Questo è un fatto del tutto generale, cioè non dipende dal fatto che il filo sia immerso perpendicolarmente al campo magnetico generato dall'altro. Se un filo di lunghezza l, percorso da corrente i, è disposto perpendicolarmente ad un campo magnetico B, allora sente una forza la cui direzione abbiamo descritto nella lezione 40, e la cui intensità è: F = Bil.

41.4. Unità di misura di campo magnetico, corrente, carica

L'ultima equazione ricavata nel precedente paragrafo ci permette di definire l'unità di misura del campo magnetico B: da F = Bil ricaviamo che il campo magnetico B si misura in N/(A·m), unità di misura che nel SI viene chiamata Tesla e il cui simbolo è T.

Un campo magnetico uniforme ha intensità di 1 T se un filo rettilineo percorso dalla corrente di 1A, disposto perpendicolarmente alla direzione del campo, sente una forza di 1 N per ogni metro di lunghezza

Il campo magnetico di 1 T è piuttosto intenso: a titolo di esempio diciamo che il campo magnetico della terra ha un'intensità di qualche decina di μT. Per questa ragione si utilizza talvolta un'unità più piccola che si chiama gauss, simbolo G, così definita:

$$1\ G = 10^{-4}\ T = 100\ \mu T$$

Come avevamo anticipato, siamo ora in grado di comprendere la definizione di ampere data dal sistema internazionale:

si definisce corrente di 1 A quella corrente che, fatta passare in due lunghi fili rettilinei paralleli, posti nel vuoto alla distanza di 1 m, provoca tra di essi una forza di interazione la cui intensità è di $2 \cdot 10^{-7}$ newton per ogni metro di lunghezza

La definizione del coulomb deriva naturalmente da quella dell'ampere:

si definisce carica di 1 C quella trasportata dalla corrente di 1 A nel tempo di 1 s

41.5. Il campo magnetico di un filo e di un solenoide

Abbiamo visto nel paragrafo 3 la formula che ci permette di calcolare l'intensità del campo magnetico generato da un lungo filo rettilineo:

$$B = \mu_0 i/(2\pi d)$$

dove i è la corrente che circola nel filo, d la distanza dal filo del punto in cui vogliamo calcolare il campo. Verifichiamo ora la coerenza delle unità di misura dei due termini: il secondo si misura in $N/A^2 \cdot A/m$, cioè in $N/(A \cdot m)$, cioè in tesla, come è giusto che sia.

Per completezza (e per fare qualche esercizio...) vediamo anche la formula che permette di calcolare l'intensità del campo magnetico dentro un solenoide lungo e compatto:

$$B = \mu_0 iN/l$$

dove i è la corrente che circola nelle spire del solenoide, N è il numero delle spire, l è la lunghezza del solenoide. Solenoide lungo e compatto significa che il numero delle spire è molto grande, cioè la distanza tra due spire successive è molto piccola rispetto alla lunghezza l del solenoide, che a sua volta è molto grande rispetto al diametro di ciascuna spira.

41.6. Forza di Lorentz e prodotto vettore

Nel paragrafo 3 abbiamo visto che un filo di lunghezza l, percorso da una corrente i, immerso perpendicolarmente ad un campo magnetico B, è soggetto a una forza $F = Bil$.

La corrente i nel filo consiste, convenzionalmente, in un flusso di particelle di carica positiva che scorrono nel filo nella stessa direzione della corrente. Sappiamo che in realtà si tratta di un flusso di elettroni che scorrono in direzione opposta a quella della corrente, ma la differenza non è importante in ciò che stiamo per dire.

E' lecito sospettare che la forza macroscopica sentita dal filo sia il risultato di tante forze microscopiche. Possiamo cioè immaginare che ogni particella carica, per il fatto

stesso di muoversi perpendicolarmente ad un campo magnetico, senta una forza perpendicolare sia alla direzione del campo sia alla direzione del moto. Tutte le particelle, che hanno la stessa carica, si muovono nella stessa direzione, perpendicolarmente allo stesso campo magnetico. Tutte, se l'ipotesi è giusta, sentono una forza che ha la stessa direzione. Il filo nel suo complesso, quindi, sente una forza in quella direzione.
Ebbene: le cose stanno esattamente così! La forza che agisce su ogni particella carica che si muove perpendicolarmente ad un campo magnetico si chiama forza di Lorentz. La sua direzione è quella che abbiamo visto nella scorsa lezione: per una particella di carica positiva occorre orientare l'indice della mano destra come la velocità, il medio come il campo, quindi il pollice indicherà la direzione della forza.
Quanto all'intensità della forza di Lorentz possiamo facilmente ricavarla con un trucco ingegnoso. Supponiamo cioè che la corrente nel filo sia composta da un'unica particella di carica q, che in un tempo t percorre l'intera lunghezza l del filo. In questo caso l'intensità della corrente è data da $i = q/t$, quindi ricaviamo:

$$F = Bil = B(q/t)l = Bq(l/t) = Bqv$$

Possiamo generalizzare questa formula al caso in cui la velocità non è necessariamente perpendicolare al campo, ma forma con il campo un angolo θ qualsiasi. La formula diventa allora:

$$F = qvB\sin(\theta)$$

Se $\theta = 90°$ allora $\sin(\theta) = 1$, e ritroviamo il caso precedente.
Se $\theta = 0$ oppure $\theta = 180°$ (cioè se la particella viaggia nella stessa direzione del campo, oppure in direzione opposta), allora $\sin(\theta) = 0$, e concludiamo che la particella carica non sente alcuna forza a causa del campo magnetico.

Come già preannunciato nella lezione 40, tutte le considerazioni fatte sulla direzione e sull'intensità della forza di Lorentz si possono riassumere in una formula compatta, sfruttando la nozione di prodotto vettore:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Se una particella carica, in moto con velocità $\vec{v}$, sente l'azione contemporanea sia di un campo elettrico $\vec{E}$ sia di un campo magnetico $\vec{B}$, allora la forza cui è sottoposta diventa naturalmente:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

41.7. Nasce un problema grave

Mettiamoci ora in una situazione particolare. Un filo è percorso da corrente, nelle sue vicinanze una particella di carica positiva viaggia parallela al filo, nella stessa direzione della corrente, non ci sono altre cariche elettriche che generino un campo elettrico.

Quindi la particella sente una forza, che la attrae verso il filo, dovuta alla sola azione del campo magnetico. La situazione è descritta nella prossima figura (►fig.41.2):

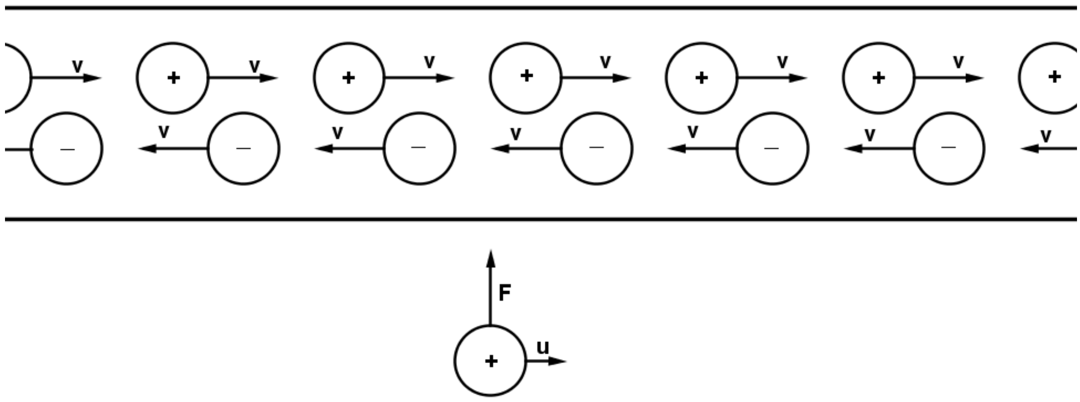

fig.41.2 una particella di carica positiva viaggia con velocità u nella stessa direzione della corrente

Abbiamo modellizzato la corrente, che scorre verso destra, come un flusso di particelle positive che viaggiano in quella direzione, più un flusso di particelle negative che viaggiano verso sinistra. Cariche positive e cariche negative sono ugualmente spaziate le une dalle altre, quindi ogni tratto di filo ha carica nulla.

C'è un problema evidente: che cosa succede se cambiamo sistema di riferimento, e ci mettiamo in quello della particella in moto? Nel nuovo sistema di riferimento la particella è ferma, quindi non sente affatto la forza di Lorenz dovuta al campo magnetico generato dal filo! Nel riferimento della particella succedono cose completamente diverse da quelle che si osservano nel riferimento del laboratorio: sembra proprio che il principio di relatività galileiano (le leggi della meccanica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali) non sia più valido se cerchiamo di estenderlo anche ai fenomeni elettromagnetici. In qualche sistema di riferimento la particella e il filo si attraggono e quindi si avvicinano, in qualche altro mantengono la stessa distanza perché non c'è alcuna forza attrattiva: sembra proprio che le leggi dell'elettromagnetismo siano diverse in diversi sistemi di riferimento inerziali.

Ma c'è anche una buona notizia: tutte le leggi della fisica, sia quelle della meccanica sia quelle dell'elettromagnetismo, sono davvero le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali. In particolare, nel caso che stiamo esaminando, il filo e la particella carica si attraggono in tutti i sistemi di riferimento inerziali, compreso quello in cui la particella è ferma. E' la relatività galileiana che non funziona, o meglio: funziona solo per i fenomeni meccanici, a patto che coinvolgano velocità molto piccole rispetto a quella della luce.

La soluzione fu trovata da Albert Einstein nel 1905, formulando quella che oggi è nota come "teoria della relatività ristretta". Qualche dettaglio su questa teoria lo vedremo più avanti, nelle lezioni 45 e 46. Per ora ci basta dire che la teoria di Einstein

generalizza quella di Galileo, che ne diventa un caso particolare, vero per i fenomeni meccanici che avvengono con velocità piccole rispetto a quelle della luce.
Quanto al problema in esame la teoria di Einstein risolve l'apparente paradosso in un modo davvero meraviglioso, che ora accenniamo brevemente. Se vogliamo che nel riferimento della particella il filo eserciti comunque la sua azione attrattiva, allora non c'è che un'unica possibilità: il filo deve avere una carica negativa! Inutile dire che la relatività di Galileo non è assolutamente in grado di spiegare come il filo possa avere una carica quando lo si osserva nel riferimento della particella. La relatività di Einstein, invece, lo spiega in modo incontrovertibile, anche se a prima vista un po' strano.

Vedremo, nella lezione 46, che i corpi in moto rispetto al nostro sistema di riferimento si accorciano nella direzione del moto. L'effetto di accorciamento è tanto più pronunciato quanto più grande è la loro velocità. La prossima figura spiega quello che accade nel caso che stiamo studiando (►fig.41.3):

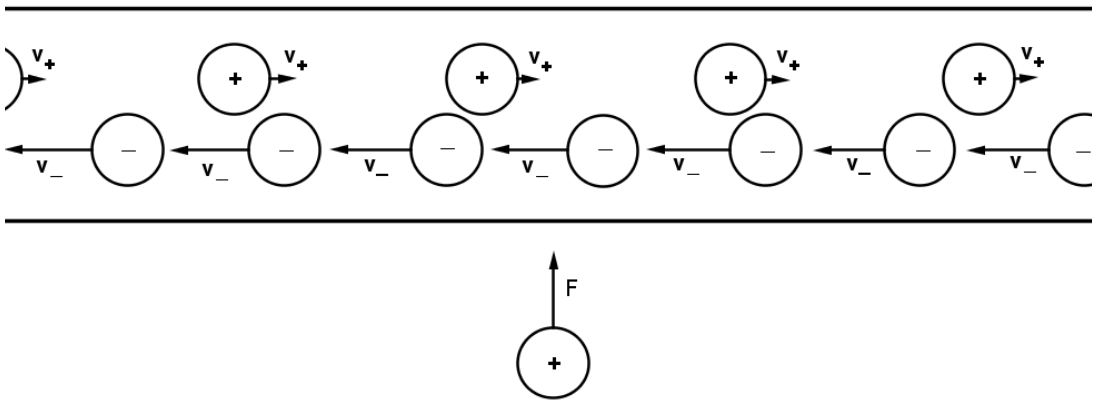

fig.41.2 la stessa situazione della figura precedente, vista nel riferimento della particella

Le particelle che si muovono nel filo hanno cambiato la loro velocità: quelle positive vanno più piano, perché il sistema di riferimento si muove nella loro stessa direzione, quelle negative vanno più forte, perché il riferimento si muove in direzione opposta. Risultato: la distanza che separa le particelle di carica negativa risulta scorciata rispetto alla distanza che separa le particelle positive. E' proprio ciò che la figura mostra. Ma ora guardate attentamente un pezzo qualsiasi del filo: notate qualcosa? Qualunque pezzo di filo ha ora una carica negativa! Quindi il filo attrae la particella nonostante il fatto che in questo riferimento essa sia ferma.

L'attrazione tra filo e particella è reale: come tutto ciò che è reale lo si osserva allo stesso modo in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Senza la contrazione delle lunghezze, tuttavia, non sarebbe possibile spiegare come mai. Ricordatevene, quando ne parleremo nella lezione 46: forse questo ricordo vi aiuterà a trovare un po' meno strana la realtà che ci circonda.