Lezione 43: Le equazioni di Maxwell

43.1. Il flusso di campo elettrico

Nella scorsa lezione abbiamo introdotto la grandezza flusso di campo magnetico, partendo da un semplice esempio di tipo idraulico, in cui prendevamo in considerazione un campo uniforme di velocità. Possiamo naturalmente calcolare il flusso di un qualsiasi campo vettoriale, per esempio di un campo elettrico.

La situazione più semplice è quella di un campo elettrico uniforme, che sappiamo trovarsi tra le armature di un condensatore piano, se sono molto estese rispetto alla distanza che le separa. Se consideriamo una superficie piana di area S, posta perpendicolarmente alle linee di campo, orientata in modo che il versore normale **n** punti nella stessa direzione delle linee di campo (quindi è diretto verso l'armatura carica negativamente), allora il flusso del campo elettrico attraverso la superficie è semplicemente: $\Phi(E) = E \cdot S$. In generale, se si ruota la superficie in modo che **n** formi un angolo θ con le linee di campo, allora il flusso diventa:

$$\Phi(E) = E \cdot S \cdot \cos(\theta)$$

Una situazione altrettanto semplice è quella mostrata nella prossima figura (►fig.43.1): una porzione di superficie sferica è investita dal campo elettrico generato da una carica positiva Q posta nel suo centro.

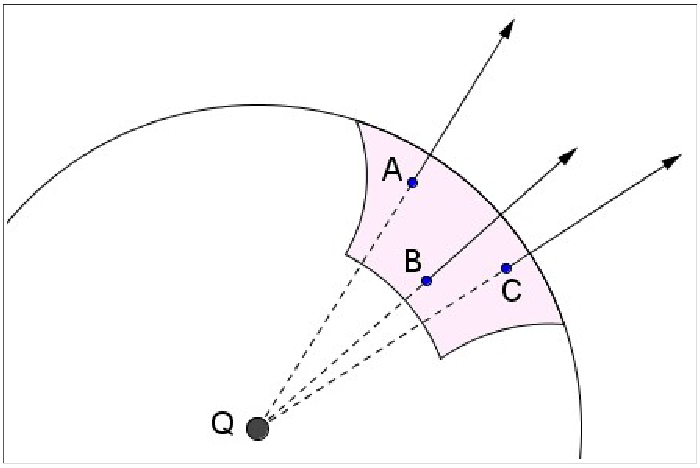

fig 43.1 flusso attraverso una porzione di superficie sferica del campo, generato da una carica Q posta nel suo centro

La superficie non è piana, ma possiamo pensarla come unione di piccole porzioni praticamente piane. Il campo è perpendicolare a ciascuna piccola porzione, e dappertutto ha la stessa intensità $Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ dove r è il raggio della sfera cui la superficie appartiene. Il versore **n** ha in ogni punto la stessa direzione del campo: per

convenzione, infatti, una superficie chiusa la si orienta in modo che la direzione positiva sia quella uscente, cioè diretta verso l'esterno. Quindi $\theta = 0$ e $\cos(\theta) = 1$.
Ciò detto, il flusso attraverso qualunque porzione è semplicemente:

$$\Phi(E) = S \cdot E = S \cdot Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$$

43.2. Flussi di campo attraverso superfici chiuse

Completiamo il calcolo del paragrafo precedente, considerando quello che succede quando prendiamo in considerazione non una porzione, bensì l'intera superficie sferica che contiene la carica Q nel suo centro. Tutto quello che abbiamo detto resta vero: basta considerare che la superficie dell'intera sfera è $4\pi r^2$ e si ottiene:

$$\Phi(E) = S \cdot Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2) = 4\pi r^2 \cdot Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2) = Q/\varepsilon_0$$

Nulla importano le ipotesi che abbiamo fatto per semplificare la geometria del problema: non importa che la superficie chiusa abbia forma serica, non importa che ci sia un'unica carica, non importa che stia proprio nel centro ... resta sempre vero che

il flusso di campo elettrico attraverso una qualunque superficie chiusa
è uguale alla carica elettrica racchiusa al suo interno
diviso la costante elettrica del vuoto (fatto n° 1)

L'enunciato che avete appena letto è noto come *legge di Gauss*. Quando nella lezione 35 scrivemmo la costante della legge di Coulomb nella forma $1/4\pi\varepsilon_0$ la scelta poteva apparire curiosa. Ora il senso di quella scelta diventa chiaro: scrivendo in modo più complicato la legge di Coulomb si scrive in modo più semplice la legge di Gauss, perché il fattore 4π si cancella. Poiché la legge di Gauss è più importante, in quanto ha un campo di validità più ampio, si è scelto di scriverla nel modo più semplice.

Calcolare il flusso di campo elettrico attraverso una superficie chiusa significa contare, per così dire, le linee di campo che la attraversano: la tabella che segue chiarisce questa idea.

La superficie chiusa contiene	Le linee di campo la attraversano in direzione	Il flusso, secondo la legge di Gauss, è
cariche positive	uscente, quindi positiva	positivo
cariche negative	entrante, quindi negativa	negativo
dipoli elettrici	ogni linea che esce certamente rientra	zero

Se vogliamo formulare la legge di Gauss per il campo magnetico il compito è davvero semplice: le linee di campo, in questo caso, sono sempre chiuse. Se consideriamo una superficie chiusa non ci importa sapere quali sorgenti di campo magnetico contiene al suo interno: ogni linea che la attraversa in una direzione la riattraversa certamente in direzione opposta. Quindi:

il flusso di campo magnetico attraverso una qualunque superficie chiusa è sempre uguale a zero (fatto n°2)

43.3. La circuitazione del campo elettrico

Saper calcolare il flusso di un campo è certamente importante. Altrettanto importante è saperne calcolare la circuitazione. Come il flusso attraverso una superficie chiusa misura il numero di linee di campo che la attraversano, così la circuitazione lungo una linea chiusa descrive la tendenza delle linee di campo ad avvolgersi intorno a quella linea. Abbiamo già visto una situazione in cui le linee di campo elettrico hanno proprio questa tendenza: nel paragrafo 5 della scorsa lezione. Prendiamo nuovamente in considerazione la spira circolare attraversata da un campo magnetico diretto verso l'osservatore (►fig.42.4), campo che cresce in modo uniforme nel corso del tempo: abbiamo visto che si crea una corrente indotta che circola in verso orario. Questa corrente è dovuta ad una campo elettrico che in ogni punto ha direzione tangente alla spira, come mostrato nella prossima figura (►fig.43.2)

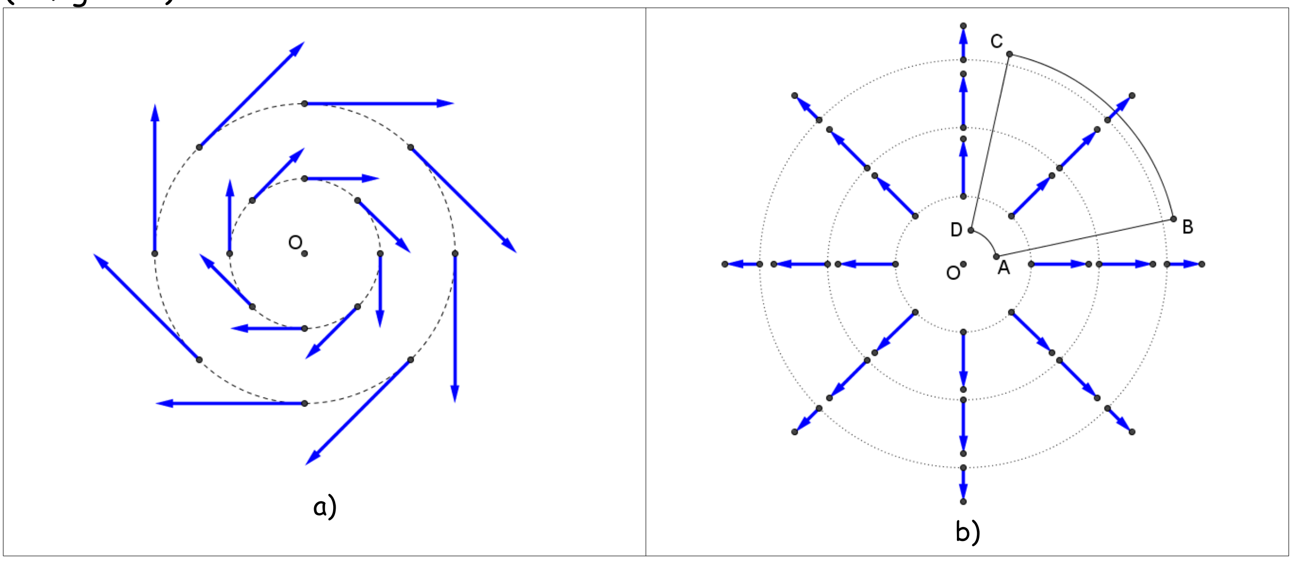

fig 43.2 a) campo elettrico che circola lungo la spira attraversata da un campo magnetico variabile
b) un campo elettrico a simmetria radiale non circola lungo il percorso chiuso ABCDA

Nella lezione 42 abbiamo calcolato la differenza di potenziale indotta ai capi della spira: 3.14 V se la spira ha raggio 1 m e il campo cresce al ritmo costante di 1 T/s. Ora calcoliamo il campo elettrico indotto che circola lungo la spira: 3.14 V di ddp su 6.28 m di circonferenza, cioè 0.5 V/m di campo elettrico, ovvero 0.5 N/C. Significa naturalmente che ogni coulomb di carica è messo in moto da una forza di 0.5 N, oppure che ogni coulomb di carica sperimenta una differenza di potenziale di 0.5 V per ogni metro percorso lungo la spira. Nella parte a) della figura vediamo due percorsi, corrispondenti a spire di raggio l'una il doppio dell'altra. Lungo la spira due volte più grande circola un campo elettrico due volte più intenso! Se fate i conti vi accorgete che ciò è giusto: la spira più grande racchiude un'area 4 volte maggiore, quindi il flusso cresce a un ritmo 4 volte più grande, quindi la tensione indotta è 4 volte maggiore. Per calcolare il campo dividiamo per una lunghezza, quella del cerchio, che è solo 2 volte maggiore: quindi il campo è davvero doppio.

Nella parte b) della figura ci occupiamo del consueto campo elettrico generato da cariche ferme: lo chiameremo campo elettrostatico, per distinguerlo dal campo elettrico indotto dinamicamente dalle variazioni di campo magnetico. In particolare la figura mostra un campo a simmetria radiale, simile a quello generato da una carica positiva posta in O. La circuitazione del campo elettrico lungo la linea chiusa ABCDA è zero, come vedremo in dettaglio nel prossimo paragrafo.

La circuitazione del campo elettrico, quindi, non dipende da come sono disposte le cariche ferme nello spazio, ma solo da come varia il flusso di campo magnetico. Possiamo quindi formulare la legge della circuitazione per il campo elettrico:

la circuitazione del campo elettrico lungo una qualsiasi linea chiusa
è uguale alla derivata rispetto al tempo del flusso di campo magnetico
attraverso una superficie che ha per bordo quella linea (fatto n° 3)

43.4. Il flusso è un integrale di superficie, la circuitazione un integrale di linea

Gli oggetti matematici che corrispondono al calcolo di flussi e circuitazioni si chiamano integrali di superficie e integrali di linea rispettivamente. La prossima figura (►fig.43.3) ne illustra brevemente il significato.

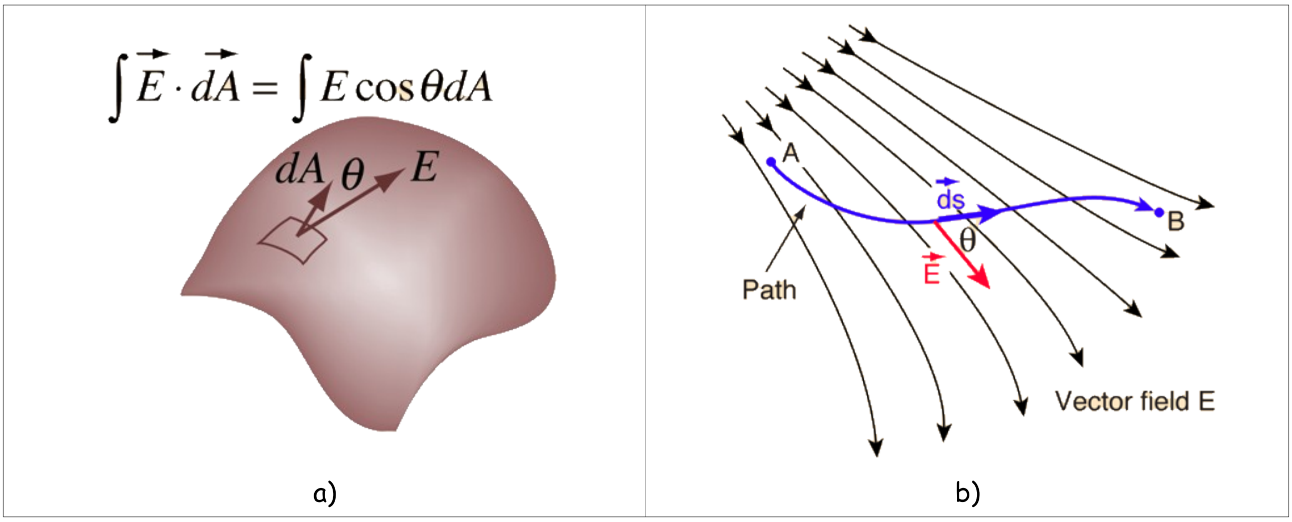

fig. 43.3 a) un integrale di superficie b) un integrale di linea

Nella parte a) della figura vediamo che l'integrale di superficie del campo è la somma di tanti termini $E \cdot \cos(\theta) \cdot dA$, dove dA è l'area di un piccolo pezzo di superficie, E è il campo elettrico in quella piccola zona, θ l'angolo tra campo e versore normale in quella zona.

Nella parte b) della figura possiamo capire che l'integrale di linea del campo è la somma di tanti termini $E \cdot \cos(\theta) \cdot ds$, dove ds è la lunghezza di un piccolo pezzo di linea, E è il campo elettrico in quella piccolo tratto, θ l'angolo tra campo e versore tangente in quel tratto.

Ora possiamo spiegare perché nella parte b) della figura 43.2 abbiamo detto che la circuitazione del campo elettrico lungo la linea chiusa ABCDA è zero. Lungo i tratti BC e DA l'integrale di linea è zero, perché il campo è perpendicolare a ogni trattino di linea. Lungo i tratti AB e CD gli integrali di linea sono opposti, perché $\theta = 0$ lungo il tratto AB, mentre $\theta = 180°$ lungo il tratto CD.

43.5. La circuitazione del campo magnetico

Giunti a questo punto sembra proprio che si rompa la simmetria che tante volte abbiamo evidenziato tra campo elettrico e campo magnetico. Un flusso variabile di campo magnetico induce un campo elettrico, ma pare che un flusso variabile di campo elettrico NON induca un campo magnetico! Siamo però certi che le cose stiano davvero così? La prossima figura (►fig.43.4) ci aiuta a riflettere sulla questione.

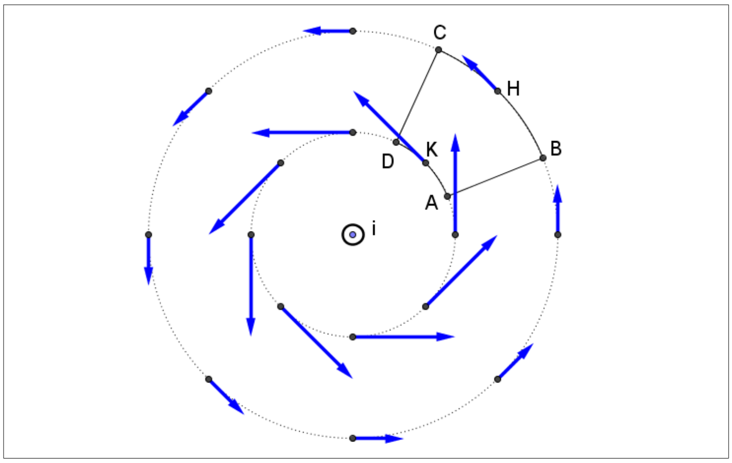

fig 43.4 la circuitazione del campo magnetico lungo tre diverse linee chiuse

Quello che vediamo rappresentato in figura è il campo magnetico generato da un lungo filo percorso da corrente i diretta verso l'osservatore. Sappiamo che il campo magnetico ha intensità $B = \mu_0 i/2\pi r$ in tutti i punti di un cerchio di raggio r con centro nel filo e la sua direzione è tangente al cerchio. Quindi la circuitazione vale $\mu_0 i$ lungo qualunque cerchio con centro nel filo. Non solo: la circuitazione vale $\mu_0 i$ lungo qualunque curva concatenata con il filo.

Se però consideriamo una curva chiusa NON concatenata con il filo, come ad esempio il circuito ABCDA, vediamo subito che la circuitazione del campo magnetico è zero. Infatti lungo i tratti AB e CD l'integrale di linea è zero, perché campo e linea sono perpendicolari. Gli integrali lungo i tratti BC e DA sono opposti, perché perché $\theta = 0$ lungo il tratto BC, mentre $\theta = 180°$ lungo il tratto DA.

La circuitazione del campo magnetico lungo un qualunque circuito che non sia concatenato ad un filo percorso da corrente dovrebbe quindi essere zero, a meno che ... a meno che non ci sia, a far le veci della corrente, una variazione del flusso di campo elettrico attraverso una superficie che ha per bordo il circuito che stiamo considerando.

Siamo quindi tornati alla questione iniziale di questo paragrafo: se variazioni di flusso elettrico davvero inducessero un campo magnetico, allora la simmetria tra i due campi sarebbe completa.

43.6. La sintesi di Maxwell

La sintesi finale fu compiuta da Maxwell, che nel 1861 dimostrò come davvero ci sia completa simmetria tra i due campi. Il suo argomento si può descrivere in modo semplice osservando quello che accade intorno ad un condensatore che si sta caricando (►fig.43.5).

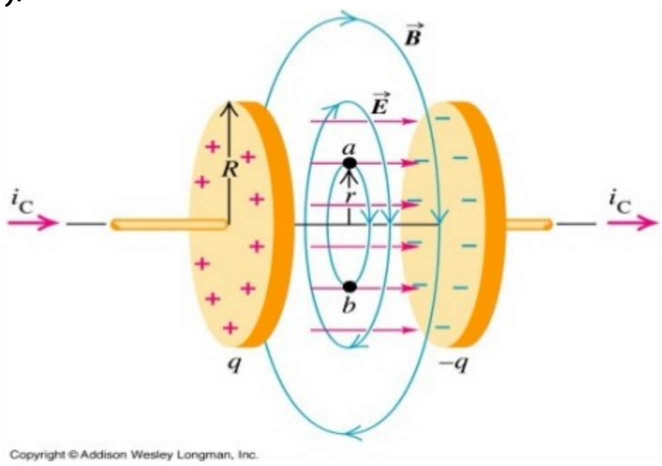

fig 43.5 la corrente di spostamento di Maxwell

La corrente i_C che carica un condensatore varia nel tempo: grande all'inizio, diventa più piccola a mano a mano che il condensatore si carica, fino a ridursi a zero quando il condensatore è completamente carico. Intorno ai fili c'è dunque un campo magnetico, la cui circuitazione, lungo cerchi che hanno centro nel filo, è uguale a $\mu_0 i_C$. Il campo magnetico, però, dovrebbe sparire magicamente quando consideriamo cerchi che stanno in piani collocati tra le armature del condensatore! Infatti quei cerchi non sono concatenati con alcuna corrente, perché non c'è corrente tra un'armatura e l'altra. Ma, ragionava Maxwell, è assurdo pensare che il campo magnetico improvvisamente scompaia all'altezza del condensatore. Il campo magnetico c'è ovunque, e ovunque è diretto allo stesso modo con la stessa intensità. Intorno ai fili è dovuto alla corrente i_C, intorno al condensatore è dovuto al fatto che nel condensatore c'è una *corrente di spostamento* i_S, ovvero un flusso di campo elettrico, variabile nel tempo, che attraversa i piani collocati tra le armature.

Se vogliamo che la corrente di spostamento sia uguale alla corrente di carica i_C, bisogna che i_S sia proporzionale alla derivata del flusso di campo elettrico:

$$i_S = \varepsilon_0 \cdot d\Phi(E)/dt$$

La scoperta di Maxwell si può sintetizzare così:

la circuitazione del campo magnetico lungo una qualsiasi linea chiusa
è la somma di due termini: uno proporzionale alla derivata rispetto al tempo del flusso
di campo elettrico attraverso una superficie che ha per bordo quella linea,
l'altro proporzionale alla corrente concatenata con la linea (fatto n°4)

43.7. Le equazioni di Maxwell

Tutta la meccanica si basa sulle tre leggi Newton, tutta la termodinamica sui quattro principi che curiosamente abbiamo numerato da zero a tre, tutto l'elettromagnetismo sulle 4 equazioni di Maxwell.

Si tratta di 4 equazioni che traducono in simboli i quattro fatti che abbiamo elencato nel corso di questa lezione. I fatti sono quelli relativi al comportamento elettromagnetico del vuoto. I simboli sono i seguenti:

il flusso di campo elettrico attraverso una qualunque superficie chiusa è uguale alla carica elettrica racchiusa al suo interno diviso la costante elettrica del vuoto	$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{Q_{interna}}{\epsilon_0}$
il flusso di campo magnetico attraverso una qualunque superficie chiusa è sempre uguale a zero	$\oint \vec{B}\cdot d\vec{A}=0$
la circuitazione del campo elettrico lungo una qualsiasi linea chiusa è uguale alla derivata rispetto al tempo del flusso di campo magnetico attraverso una superficie che ha per bordo quella linea	$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s}=-\frac{d\Phi_B}{dt}$
la circuitazione del campo magnetico lungo una qualsiasi linea chiusa è la somma di due termini: uno proporzionale alla derivata rispetto al tempo del flusso di campo elettrico attraverso una superficie che ha per bordo quella linea, l'altro proporzionale alla corrente concatenata con la linea	$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}=\mu_0 i_{concatenata}+\mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}$

Non ci aspettiamo che possiate capire il significato profondo dei simboli: ci vogliono ancora molto tempo e molto studio per riuscirci davvero. Quello che certamente siete in grado di comprendere è la straordinaria efficacia della matematica nel condensare in sequenze di simboli compatte la complessità del mondo in cui viviamo.