

## Lezione 45: Il tempo è relativo

### 45.1. Facciamo il punto della situazione

Studiando i fenomeni meccanici abbiamo imparato a descriverli usando le tre leggi del moto di Newton. Abbiamo scoperto che esse sono vere in una particolare classe di riferimenti, che abbiamo chiamato riferimenti inerziali. Quello della Terra è, con buona approssimazione, un riferimento inerziale. Ogni riferimento che si muova di moto rettilineo uniforme rispetto ad un riferimento inerziale è a sua volta un riferimento inerziale, mentre un riferimento che accelera rispetto ad un riferimento inerziale non è inerziale.

Le leggi di Newton, applicate al moto di qualunque corpo, permettono di calcolarne l'accelerazione, non la velocità. L'accelerazione con cui un corpo si muove, infatti, è la stessa in qualunque riferimento inerziale, mentre la velocità con cui si muove dipende dal riferimento scelto. Un marinaio fermo sul ponte del gran navilio di Galileo, per esempio, si muove rispetto alla Terra con velocità costante  $v$ , se la nave si muove, con quella velocità, rispetto alla Terra. L'accelerazione del marinaio, invece, è nulla sia nel riferimento della Terra, sia in quello della nave.

Abbiamo imparato la *legge classica di addizione di velocità*: se un corpo ha velocità  $v$  nel riferimento  $S$ , e il riferimento  $S'$  si muove con velocità  $u$  rispetto a  $S$ , allora la velocità del corpo rispetto a  $S'$  è  $v' = v - u$ .

Abbiamo chiamato *principio di relatività galileiana* l'affermazione secondo cui le leggi della meccanica sono le stesse in tutti i riferimenti inerziali.

Studiando poi i fenomeni elettromagnetici abbiamo imparato a descriverli usando le equazioni di Maxwell. Abbiamo visto che tali equazioni hanno una conseguenza sorprendente: esse permettono di calcolare la velocità con cui si propaga la luce nel vuoto, velocità il cui valore risulta essere  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 299792458$  m/s.

Abbiamo visto come questo risultato fece subito nascere una domanda cruciale: in quale riferimento sono vere le equazioni di Maxwell? Detto in altri termini: in quale riferimento la luce si propaga con velocità  $c$ ? La prima e più naturale ipotesi fu quella che le equazioni di Maxwell fossero vere in un particolare riferimento inerziale, al quale si diede il nome di *etere*, mentre in qualunque altro riferimento inerziale, in moto rispetto all'etere con velocità  $u$ , la luce avrebbe avuto velocità  $v = c - u$ .

Se questa ipotesi fosse stata corretta, allora il principio di relatività galileiano si sarebbe rivelato vero per i fenomeni meccanici, ma non per quelli elettromagnetici. Infatti le leggi di Newton, che descrivono i fenomeni meccanici, sono le stesse in tutti i riferimenti inerziali, mentre le equazioni di Maxwell, che descrivono i fenomeni

elettromagnetici, sarebbero vere solo nel riferimento dell'etere. In tutti gli altri riferimenti inerziali la velocità della luce si calcolerebbe usando la legge classica di addizione delle velocità.

L'alternativa, d'altra parte, appariva troppo bizzarra per essere presa seriamente in considerazione: le equazioni di Maxwell avrebbero dovuto essere vere in tutti i sistemi inerziali. In tutti i sistemi inerziali la velocità della luce avrebbe quindi dovuto essere la stessa:  $c = 299792458$  m/s. Siamo seri: si è mai vista una velocità che non dipenda dal sistema di riferimento? E' mai possibile che la legge classica di addizione delle velocità sia sbagliata?

#### 45.2. Misurare la velocità della luce

In tutto ciò che abbiamo detto si pone un problema fondamentale: quello di misurare la velocità della luce. Problema difficile, naturalmente, perché la luce si propaga con una velocità di gran lunga superiore alle velocità che noi umani siamo abituati a sperimentare. Tanto che, almeno fino a Galileo, l'opinione comune era che la luce non si propagasse affatto, ma che, in modo istantaneo, occupasse tutto lo spazio tra la sorgente e l'osservatore.

Fu dunque Galileo il primo che si pose il problema di misurare la velocità di propagazione della luce, e per farlo mise a punto un esperimento di straordinaria ingenuità. Armato di una lanterna salì sopra un'altura, e altrettanto fece, su di un'altura poco lontana, un suo collaboratore armato di una lanterna simile. L'idea era semplice: Galileo accende la sua lanterna, la luce viaggia verso il suo collaboratore, il quale, nell'istante in cui la luce lo raggiunge, accende a sua volta la propria lanterna. Galileo, in questo modo, pensava di poter misurare il tempo impiegato dalla luce per compiere il viaggio di andata e ritorno. Dividendo la lunghezza del viaggio per il tempo impiegato avrebbe quindi trovato la velocità della luce. E' facile, per noi che viviamo quattro secoli dopo, immaginare il risultato: la luce viaggia troppo veloce perché si possa effettuare una misura di questo tipo. Se si osserva un ritardo apprezzabile, esso è dovuto ai riflessi degli sperimentatori, non certo al tempo impiegato dalla luce nel compiere il viaggio.

La prima misura attendibile venne realizzata da Ole Roemer, un astronomo danese, sulla base delle osservazioni da lui fatte negli anni intorno al 1670. Romer osservò per lunghi periodi le eclissi di Io, uno dei satelliti di Giove scoperti proprio da Galileo nel 1610 (► fig.45.1). La parte a) della figura mostra un passaggio di Io davanti a Giove: la macchia nera che si osserva è l'ombra che il satellite proietta sulla superficie del pianeta. Io, ruotando intorno a Giove, tra un po' scomparirà alla vista, per poi

riapparire più tardi, dal lato opposto del pianeta. Roemer era in grado di prevedere con grande precisione i momenti in cui Io scompariva o riappariva alla vista.

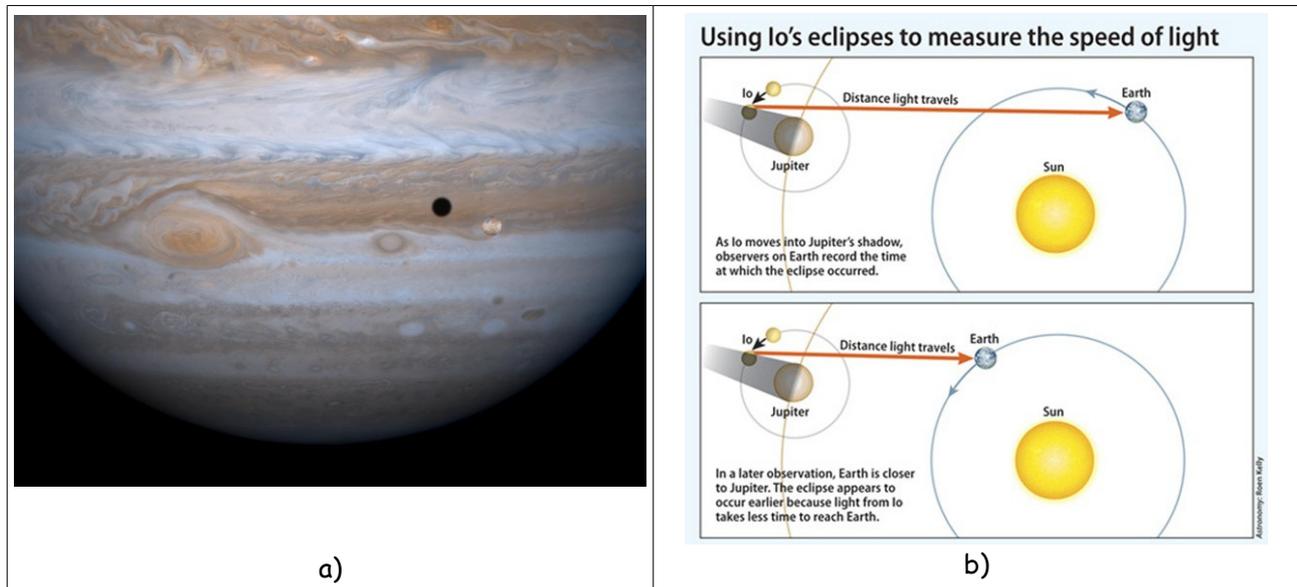


Fig. 45.1 a) il satellite Io in transito davanti a Giove  
b) come appaiono le eclissi di Io quando la Terra è più o meno vicina a Giove

Si accorse però, con sua grande sorpresa, che alcune volte Io scompariva *prima* del previsto, altre volte *dopo*. Una lunga analisi dei dati raccolti gli permise di capire che il *prima* si verificava quando la Terra era più vicina a Giove, il *dopo* quando la Terra ne era più lontana. La parte b) della figura illustra la conclusione tratta da Roemer: quando la Terra è più vicina a Giove la luce emessa da Io impiega meno tempo per raggiungere i nostri telescopi, mentre il contrario accade quando la Terra è più lontana. I calcoli fatti sui dati lo spinsero a concludere che la luce impiega circa 22 minuti a percorrere una distanza pari al diametro dell'orbita della Terra intorno al sole. Tradotto in unità moderne il risultato di Roemer significa che la velocità della luce è di circa 220 mila km al secondo: l'ordine di grandezza è quello giusto!

La precisione delle misure migliorò con il trascorrere degli anni, fin quando, dopo la metà del diciannovesimo secolo, i risultati si assestarono intorno al valore di 300 mila km al secondo. L'incertezza sui risultati delle misure era piccola abbastanza da permettere di affrontare il problema cruciale: la velocità della luce cambia oppure no, a seconda del moto dell'osservatore?

A partire dagli anni '80 molti esperimenti vennero realizzati, il più celebre dei quali, nel 1887, da Albert Michelson e Edward Morley. I risultati furono inquietanti: il cambiamento, se mai c'è, è troppo piccolo per essere misurato con quel tipo di esperimento. Tanto inquietanti che la maggioranza dei fisici non cambiò affatto idea: continuarono a credere nell'esistenza dell'etere, nella validità delle trasformazioni di Galileo, nel fatto che la velocità della luce *deve* quindi cambiare a seconda del moto dell'osservatore. Si inventarono ipotesi ardite per spiegare come mai non ce ne

accorgiamo nei nostri esperimenti. Ci fu perfino chi, come Lorentz, arrivò a ipotizzare che sì, la velocità della luce cambia a seconda del moto dell'osservatore, ma lui non se ne può accorgere, perché i metri con cui misura le distanze cambiano di lunghezza a seconda del suo moto.

Si dovette attendere il 1905 perché Einstein riuscisse a formulare una teoria finalmente coerente e convincente: la teoria della relatività ristretta. Oggi siamo certi del fatto che la velocità della luce non dipende dal moto dell'osservatore: il sistema di posizionamento GPS, in caso contrario, non potrebbe assolutamente funzionare. A questo tema è dedicato un prossimo approfondimento.

### 45.3. La svolta di Einstein

I risultati degli esperimenti, quindi, non furono chiari da subito. Einstein stesso dice che dei risultati non si curò poi molto. Non lo fece perché aveva una fede profonda, per lui ben più importante: il principio di relatività *deve* essere vero per tutti i fenomeni, sia quelli meccanici, sia quelli elettromagnetici. La velocità della luce, quindi, *deve* essere la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali. La legge classica di addizione delle velocità, quindi, *deve* essere sbagliata. Ma se la legge classica è sbagliata, ci deve essere per forza qualcosa di profondamente sbagliato nelle nostre idee sullo spazio e sul tempo.

Cerchiamo di interpretare quello che la legge classica dice, considerando un caso particolarmente semplice.

Consideriamo cioè un riferimento  $S'$  che si muove verso destra con velocità  $u = 5$  m/s rispetto al riferimento  $S$ . Un punto  $P$  si muove, rispetto a  $S$ , con velocità  $v = 12$  m/s, sempre verso destra (► fig.45.2). Qual è la velocità  $v'$  di  $P$  rispetto a  $S'$ ?

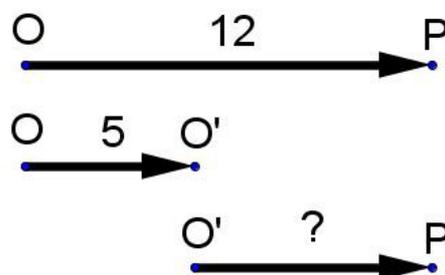


Fig. 45.2 quanto è lungo il vettore incognito?

La risposta sembra quasi ovvia:  $v' = 7$  m/s. Perché? Il fatto che  $u = 5$  m/s verso destra significa che, al passare di ciascun secondo, l'origine di  $S'$  si sposta di  $5$  m verso destra rispetto all'origine di  $S$ . Il fatto che  $v = 12$  m/s verso destra significa

che, al passare di ciascun secondo, P si sposta di 12 m verso destra rispetto all'origine di S. La domanda è quindi: di quanto si sposta P, in quel secondo, rispetto all'origine di S'? Se la vostra risposta è 7 m/s state usando la legge classica di addizione delle velocità. Se la legge è sbagliata c'è qualcosa di sbagliato nell'uso che abbiamo fatto delle parole "metro" e "secondo": nel nostro ragionamento, infatti, non ci sono altre idee coinvolte.

#### 45.4. Quanto dura un secondo?

La domanda che dà il titolo a questo paragrafo sembra provocatoria: un secondo dura un secondo, cioè il tempo di 9192631770 periodi della radiazione emessa, in particolari condizioni, da un atomo di cesio 133. Il tempo è assoluto, secondo Newton e secondo il buon senso: qualunque osservatore inerziale concorda sulla durata di questa emissione. Einstein, tuttavia, comprese che ciò non può essere vero, se davvero la velocità della luce è la stessa per qualunque osservatore. Per comprendere il suo ragionamento conviene considerare un orologio di tipo particolare: l'orologio a luce (► fig.45.3). Si tratta di un orologio ideale, in cui un fotone si muove avanti e indietro lungo un tubo lungo L, le cui estremità sono chiuse da due specchi A e B, sui quali il fotone si riflette. Ad ogni impatto del fotone sullo specchio A l'orologio emette un "tic", quando il fotone impatta su B c'è un "tac". Se vogliamo che l'intervallo tra un tic e il tac successivo sia proprio di un secondo, allora l'orologio deve essere davvero molto lungo: circa 300000 km! Più realisticamente possiamo considerare un orologio a luce lungo circa 30 cm: esso batterà dei tic e dei tac distanti circa 1 ns l'uno dal successivo. Possiamo dire cioè che la velocità della luce è di circa 30 centimetri al nanosecondo.

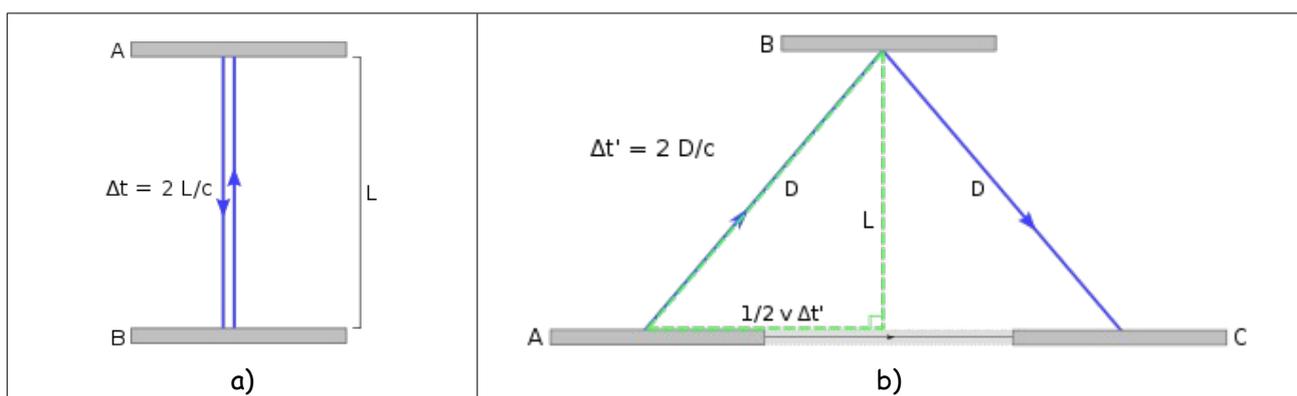


Fig. 45.3 un orologio a luce a) nel suo riferimento di quiete  
 b) in un riferimento in cui l'orologio si muove con velocità v

L'orologio a luce, nonostante la sua apparenza bizzarra, non ha proprio nulla di particolare: funziona, come tutti gli altri orologi, ripetendo all'infinito la stessa sequenza di azioni. In un orologio a pendolo si ripetono le oscillazioni della massa

sospesa. In un orologio atomico si ripetono le oscillazioni dell'onda elettromagnetica emessa. In un orologio a luce si ripetono i viaggi avanti e indietro del fotone.

Misurare la durata di un fenomeno significa, quale che sia l'orologio usato, contare quante volte si ripete l'azione. Se ragioniamo su un orologio a luce, però, è più facile accorgersi che la durata di un fenomeno dipende dal sistema di riferimento dal quale osserviamo l'orologio. Nel riferimento in cui l'orologio è fermo (parte a della figura) l'intervallo tra due tic consecutivi è  $\Delta t = 2L/c$ . Nel riferimento in cui l'orologio è in moto con velocità  $v$  in direzione perpendicolare a quella del tubo (parte b della figura) l'intervallo tra i due tic è più lungo, perché la luce percorre, alla stessa velocità, un tratto di lunghezza maggiore,  $2D$  invece che  $2L$ . L'intervallo  $\Delta t'$  tra due tic consecutivi è di conseguenza più lungo:  $\Delta t' = 2D/c$ .

Quindi l'orologio a luce, osservato da un sistema di riferimento in cui si muove con velocità  $v$ , marcia più lentamente di quando lo osserviamo nel suo riferimento di quiete. Quello che è vero per l'orologio a luce è vero per un orologio di tipo qualsiasi:

*il tempo, nel riferimento in moto, scorre più lentamente di quanto non faccia nel riferimento di quiete.*

Come mai nessuno, prima di Einstein, si era accorto di un fatto così evidente? La risposta è semplice: l'orologio in figura si sta muovendo con una velocità  $v$  poco più piccola di quella della luce  $c$ . Nel tempo che il fotone impiega a raggiungere lo specchio B l'orologio si sposta verso destra di un tratto ben apprezzabile: il cateto orizzontale  $\frac{1}{2}v\Delta t'$  è poco più corto dell'ipotenusa  $D$ . La meccanica di Newton, invece, si occupa di orologi che si muovono con velocità molto più piccole di quella della luce. La parte b) della figura, in questi casi, risulta quasi indistinguibile dalla parte a), perciò il rallentamento dell'orologio in moto risulta inapprezzabile. Newton non aveva completamente torto nel ritenere che il tempo sia assoluto: la cosa è quasi vera nei riferimenti i cui orologi si muovono con velocità piccole (in confronto a quella della luce) rispetto agli orologi fermi sulla terra.

La cosa davvero meravigliosa è che possiamo calcolare con precisione l'entità del rallentamento che l'orologio subisce nel riferimento in moto: naturalmente scopriremo che esso è tanto maggiore quanto più è grande  $v$  in rapporto alla velocità della luce  $c$ .

Cominciamo col calcolare  $D$ , usando il teorema di Pitagora:  $D = \sqrt{\left(\frac{1}{2}v\Delta t'\right)^2 + L^2}$

Al posto di  $D$  sostituiamo  $c\Delta t'/2$ , poi risolviamo l'equazione rispetto a  $\Delta t'$ :

$$\frac{c\Delta t'}{2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}v\Delta t'\right)^2 + L^2} \text{ facciamo il quadrato:}$$

$$\frac{c^2 \cdot \Delta t'^2}{4} = \frac{v^2 \cdot \Delta t'^2}{4} + L^2$$

facciamo meno  $v^2 \Delta t'^2 / 4$  e raccogliamo  $\Delta t'^2$ :

$$\frac{c^2 - v^2}{4} \cdot \Delta t'^2 = L^2$$

moltiplichiamo per  $4/(c^2 - v^2)$

$$\Delta t'^2 = \frac{4L^2}{c^2 - v^2}$$

a destra dividiamo sopra e sotto per  $c^2$ :

$$\Delta t'^2 = \frac{\frac{4L^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

facciamo la radice:

$$\Delta t' = \frac{\frac{2L}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

osserviamo che  $2L/c$  è l'intervallo  $\Delta t$  misurato nel riferimento di quiete dell'orologio:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

L'intervallo di tempo  $\Delta t'$  misurato dall'orologio in moto è più lungo dell'intervallo  $\Delta t$  misurato dall'orologio fermo: la dilatazione del tempo, come ci aspettavamo, è tanto maggiore quanto più grande è la velocità con cui l'orologio si muove. Se  $\Delta t = 1$  s, allora  $\Delta t' = 1.15$  s quando l'orologio si muove con velocità  $v = 0.5c$ , mentre  $\Delta t' = 2.29$  s quando  $v = 0.9c$  (fate i calcoli per esercizio!).

Il risultato che abbiamo appena ricavato ha una conseguenza che discuteremo più in dettaglio nella prossima lezione: se, come abbiamo visto, il ritmo con cui marcia un orologio dipende dal modo in cui si muove, allora anche la lunghezza dei regoli con cui misuriamo le distanze deve dipendere dal modo in cui si muovono! Si tratta quindi dello stesso fatto ipotizzato da Lorentz per spiegare come mai non si riuscivano a misurare cambiamenti nella velocità della luce dovuti al moto dell'osservatore. Quella di Lorentz, però, era un'ipotesi ad hoc priva di valide giustificazioni a priori. Quello di Einstein, invece, è un risultato che segue in modo quasi immediato dai due postulati che egli mette a fondamento della sua teoria della relatività ristretta:

1. *le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali,*
2. *la velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore  $c$  in tutti i sistemi di riferimento inerziali.*