Lezione 46: Anche la distanza è relativa

46.1. Un mistero e la sua soluzione

In queste lezioni abbiamo spesso parlato di elettroni, mai dei loro parenti prossimi, i muoni. Ora è giunto un momento in cui il loro ruolo diventa importante.

I muoni hanno la stessa carica degli elettroni, ma una massa circa 200 volte più grande. Proprio a causa della loro grande massa non vengono mai emessi nei decadimenti radioattivi, ma si formano negli strati alti dell'atmosfera, quando i protoni della radiazione cosmica urtano contro molecole di gas che incontrano lungo il loro cammino. I muoni così formatisi viaggiano verso la superficie della Terra con una velocità poco inferiore a quella della luce: ogni secondo circa 10 mila di essi colpiscono ogni metro quadrato di superficie. E qui sta il problema.

Già, perché si dà il caso che i muoni siano particelle instabili: la loro vita media è di 2.2 μs, poi decadono, cioè si trasformano in elettroni e neutrini. Alcuni vivono di più, altri di meno, ma *in media* vivono 2.2 μs, quasi nessuno vive cinque volte di più, diciamo per un tempo superiore a 10 μs. Una particella che viaggi a una velocità di $3 \cdot 10^8$ m/s, per un tempo non superiore a 10^{-5} s, percorre una distanza non superiore a 3 km. Ma l'atmosfera della Terra, come sappiamo, ha uno spessore ben più grande: quasi nessun muone, quindi, dovrebbe raggiungere la superficie della Terra. Come è possibile che, al contrario, ne giungano in numero così elevato?

La soluzione di questo mistero, per fortuna, l'abbiamo già vista nella lezione precedente. Il muone, in pratica, è dotato di un suo orologio interno (non abbiamo alcuna idea di come sia fatto, ma sapiamo che la cosa non importa) il quale dice alla particella quando decadere. In media l'ordine di decadere giunge dopo 2.2 μs dalla creazione del muone, quasi mai più tardi di 10 μs.

Noi, dal nostro riferimento della Terra, osserviamo il muone e ascoltiamo il ticchettio del suo orologio interno: sappiamo che un orologio in moto, quale che sia il suo meccanismo di funzionamento, rallenta. Il muone vive 2.2 μs nel *suo* sistema di riferimento, ma nel *nostro* sistema il tempo di vita media è più lungo. Molto più lungo, anzi, perché la velocità del muone è molto vicina a quella della luce. Nulla di strano, quindi, che il muone abbia tutto il tempo di raggiungere i nostri strumenti a terra. Il mistero è risolto. Sappiamo addirittura di quanto si allunga la vita del muone osservata dal nostro riferimento:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

dove abbiamo indicato con Δt_0 la vita del muone nel suo riferimento di quiete, cioè il riferimento in cui la sua velocità è zero.

46.2. Altro mistero, altra soluzione

Mettendoci nel sistema di riferimento della Terra siamo riusciti a spiegare il fatto che i muoni, nonostante una vita media troppo breve, riescono a compiere un viaggio lungo 40 km. Ma come si spiega, lo stesso fatto, nel riferimento dei muoni?
Sappiamo che le leggi della fisica sono le stesse in tutti i riferimenti inerziali, quindi nel riferimento del muone ci deve essere una spiegazione altrettanto convincente, ma completamente diversa. Per il muone, infatti, il suo orologio interno è in quiete, quindi scandisce il tempo nel modo *giusto*: sono i nostri orologi sulla Terra che rallentano vistosamente, perché viaggiano a una velocità poco inferiore a quella della luce.

Dal punto di vista del muone le cose stanno così: c'è un pianeta che gli corre incontro a una velocità di $3 \cdot 10^8$ m/s, pianeta che prima del decadimento, quindi in un tempo inferiore a 2.2 μs, lo colpisce dopo aver percorso un tratto pari allo spessore dell'atmosfera che lo circonda. Non c'è che un'unica spiegazione possibile: lo spessore dell'atmosfera, che è di 40 km nel suo riferimento di quiete, cioè quello della Terra, è molto inferiore nel riferimento del muone. Non solo: perché le due descrizioni siano coerenti tra di loro è necessario che l'atmosfera della Terra, dal punto di vista del muone, si accorci dello stesso fattore di cui si allunga, dal punto di vista della Terra, la vita media del muone.

Poiché la situazione non è semplice, proviamo a descriverla con una tabella che riassume i due diversi punti di vista:

per la Terra	la propria atmosfera è spessa: $\Delta x_0 \approx 40\,\text{km}$	la vita del muone è lunga $\Delta t = \dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})}}$
per il muone	l'atmosfera della Terra è sottile: $\Delta x = \Delta x_0 \cdot \sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})}$	la propria vita è breve: $\Delta t_0 \approx 2.2\,\mu s$

L'atmosfera della Terra si accorcia quindi di un fattore $\sqrt{(1-v^2/c^2)}$: ciò accade perché tutti i corpi, compresi naturalmente i regoli che usiamo per misurare le lunghezze, subiscono, nella direzione del moto, una contrazione di fattore $\sqrt{(1-v^2/c^2)}$.

46.3. Dilatazione dei tempi e contrazione delle lunghezze

Come intitolammo il paragrafo 4 della scorsa lezione "Quanto dura un secondo?", così avremmo potuto intitolare il paragrafo precedente "Quanto è lungo un metro?". Nella scorsa lezione la risposta era: un orologio che misura un secondo nel suo riferimento di quiete misura una durata maggiore in qualunque altro riferimento inerziale. In questa lezione la risposta è: un regolo lungo un metro nel suo riferimento di quiete ha una lunghezza inferiore in qualunque riferimento che si muova rispetto a esso nella direzione del regolo.

In generale si parla di *dilatazione dei tempi* e *contrazione delle lunghezze*. Se Δt_0 e Δx_0 sono rispettivamente la durata misurata da un orologio e la lunghezza di un regolo nel loro riferimento di quiete, allora, in un riferimento che si muova con velocità v nella direzione del regolo, durata e lunghezza valgono rispettivamente:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \qquad \text{e} \qquad \Delta x = \Delta x_0 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

Occorre prestare attenzione al fatto che la dilatazione del tempo avviene quale che sia la direzione della velocità, mentre la contrazione delle lunghezze avviene solo nella direzione della velocità. Se i due riferimenti (quello della Terra e quello del muone) viaggiano l'uno rispetto all'altro in direzione x, allora le lunghezze in direzione y e in direzione z non dipendono dal riferimento.
Se così non fosse accadrebbero fatti contrari alla logica. Se si contraessero anche le lunghezze in direzione ortogonale al moto, allora nel riferimento del muone la Terra non solo apparirebbe molto più vicina, ma sarebbe anche un bersaglio assai più stretto. Molti muoni che colpiscono la Terra nel nostro riferimento, non la dovrebbero colpire nel loro: ma l'urto è un fatto che *realmente* accade oppure no, perciò ne consegue che il suo verificarsi non può dipendere dalla scelta, del tutto arbitraria, di un riferimento piuttosto che di un altro.

Vogliamo ricordare il paragrafo 41.7, nel quale la contrazione delle lunghezze ci servì per spiegare un fatto altrimenti inesplicabile. Una particella in moto uniforme rispetto a un campo magnetico, che quindi sente una forza di Lorentz proporzionale alla sua velocità, è *realmente* attratta verso il filo, se la direzione del suo moto è la stessa della corrente che circola nel filo. Se cambiamo riferimento, e ci mettiamo in quello della particella, l'attrazione deve continuare ad esistere, sebbene non si possa più spiegare con la velocità della particella, che nel suo riferimento è zero. La spiegazione, come dicemmo allora e come possiamo confermare adesso, è data dalla contrazione delle lunghezze nella direzione del moto, più o meno accentuata a seconda della maggiore o minore velocità del riferimento.

46.4. La legge di trasformazione delle velocità

Se distanze e tempi dipendono dal sistema di riferimento, anche la velocità deve dipenderne. Se un corpo si muove con velocità v nel riferimento I, ciò significa che in un intervallo temporale Δt percorre un tratto di lunghezza Δx tale che $\Delta x/\Delta t = v$. Occorre fare attenzione al fatto che distanza e tempo sono quelli misurati da regoli e orologi del riferimento I. Se un secondo riferimento I' si muove con velocità u rispetto a I, allora la stessa velocità misurata da I' avrà un valore v' diverso da v, perché regoli e orologi di I' si comportano in modo diverso da quelli di I.

E' la stessa situazione che abbiamo già esaminato nell'approfondimento della lezione 10, dedicato alla relatività galileiana. In quell'occasione trovammo un risultato molto semplice: se il corpo e il riferimento I' si muovono nella stessa direzione, allora

$$v' = v - u$$

Ma attenzione: questo risultato discendeva dall'avere assunto che il tempo scorra allo stesso modo nei due riferimenti! L'ipotesi è quasi vera se la velocità relativa u è piccola rispetto a c, ma in generale la sappiamo essere falsa. Quindi la formula della relatività galileiana non potrà che essere un'approssimazione di quella corretta.

La formula corretta si può ricavare usando le trasformazioni di Lorentz, che saranno oggetto di un prossimo approfondimento. Qui ci accontentiamo di fornire il risultato finale che si ottiene:

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{u \cdot v}{c^2}}$$

La formula si comporta nel modo che ci aspettiamo, almeno nei casi limite di velocità molto piccole oppure molto grandi:

- se le velocità v e u sono molto piccole rispetto a c, allora il denominatore è circa 1, e riotteniamo la formula classica,
- se il moto che consideriamo è quello di un fotone, allora la sua velocità è c nel riferimento I, e nel riferimento I' otteniamo, qualunque sia la sua velocità u:

  $$v' = \frac{c - u}{1 - \frac{u \cdot c}{c^2}} = \frac{c - u}{1 - \frac{u}{c}} = \frac{c - u}{\frac{c - u}{c}} = c$$

  Questo risultato conferma quel che già sapevamo: la velocità dei fotoni è la stessa in in tutti i sistemi di riferimento.

46.5. Distanze nello spazio-tempo

Studiando la geometria abbiamo imparato a rappresentare lo spazio in cui viviamo usando un modello euclideo tridimensionale. I punti dello spazio, cioè, sono descritti da terne di numeri, e la distanza tra due punti A e B si calcola usando la metrica euclidea:

$$d^2(A,B) = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$

Nel descrivere il moto dei corpi abbiamo poi imparato a tener conto della variabile tempo. Nella meccanica classica le tre coordinate spaziali e quella temporale sono trattate in modo profondamente diverso: il luogo in cui un evento accade dipende dal sistema di riferimento scelto, nel senso che le coordinate spaziali di un evento cambiano al cambiare del riferimento. Il momento in cui quell'evento accade, invece, non dipende dal riferimento, perché si possono sincronizzare gli orologi di un riferimento qualsiasi con gli orologi di qualunque altro riferimento: il tempo, in meccanica classica, è un concetto assoluto. Il risultato è che la distanza spaziale tra due eventi non dipende dalla loro distanza temporale, e viceversa. Se, in un sistema di riferimento I, due eventi hanno una distanza spaziale di 100 km e una distanza temporale di un'ora, allora essi hanno le stesse distanze in qualunque sistema I' che si muova rispetto a I con una velocità costante comunque grande.

Abbiamo visto che nel contesto della meccanica relativistica le cose stanno in tutt'altro modo: la distanza spaziale e quella temporale dipendono entrambe dal sistema di riferimento scelto. Questo rimescolamento tra coordinate spaziali e coordinata temporale suggerisce di introdurre un'unica struttura a 4 dimensioni, che si chiama semplicemente spazio-tempo, nella quale si collocano gli eventi, rappresentati da quaterne di numeri. In un riferimento I, per esempio, un evento A sarà descritto dalla quaterna (x_A, y_A, z_A, t_A), mentre un secondo evento B sarà descritto dalla quaterna (x_B, y_B, z_B, t_B). La distanza spazio-temporale si calcola con una formula diversa da quella euclidea: indicata con s tale distanza la formula è la seguente

$$s^2(A,B) = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 - c^2 \cdot (t_B - t_A)^2 = \Delta r^2 - c^2 \Delta t^2$$

Non ci dobbiamo stupire del fatto che la formula sia diversa da quella euclidea. Fin dall'inizio del nostro studio della geometria abbiamo visto che ci sono più modi per definire le distanze, ciascuno adatto ad un diverso contesto che vogliamo modellizzare. Ricordiamo, ad esempio, come ci capitò di introdurre la distanza urbanistica, più significativa di quella euclidea quando vogliamo misurare spostamenti che possono avvenire soltanto seguendo la direzione degli assi coordinati. La formula per misurare le distanze nello spazio-tempo ha una caratteristica notevole: il quadrato della distanza può essere negativo, il che accade quando la parte spaziale r della distanza che separa A e B è minore della distanza che può coprire un fotone durante l'intervallo di tempo Δt che separa i due eventi.

46.6. L'intervallo spazio-temporale NON è relativo

Gli intervalli per i quali $s^2(A,B) < 0$ si dicono intervalli di tipo tempo. Se due eventi sono separati da una distanza di questo tipo, ciò significa che tra l'uno e l'altro passa abbastanza tempo perché ci possa essere una relazione di causa - effetto tra di essi. Un fotone, ad esempio, avrebbe tutto il tempo di viaggiare dall'uno all'altro evento, trasportando dall'uno all'altro informazioni ed energia.

Al contrario, se $s^2(A,B) > 0$, si dice che gli eventi A e B sono separati da una distanza di tipo spazio. Ciò significa che non può esserci alcuna relazione di causa - effetto tra di essi, poiché nemmeno un fotone avrebbe la possibilità di coprire, nel tempo che intercorre tra di essi, la distanza spaziale che li separa.

Per misurare distanze tra punti nell'ordinario spazio a tre dimensioni abbiamo scelto la metrica euclidea per una ragione ben precisa: le distanze, misurate in questo modo, non cambiano se cambiamo sistema di riferimento, per esempio ruotando o traslando il riferimento di partenza.

In modo del tutto analogo, per misurare distanze tra eventi nello spazio-tempo a quattro dimensioni abbiamo scelto la metrica non euclidea definita da $s^2 = \Delta r^2 - c^2\Delta t^2$ perché le distanze, misurate in questo modo, non cambiano se dal riferimento I nel quale le abbiamo misurate passiamo a un riferimento I' in moto rispetto al primo con velocità u. La cosa, come al solito, si dimostra in generale facendo ricorso alle trasformazioni di Lorentz. Qui ci accontentiamo di mostrare che ciò è vero almeno in un caso particolare, riferito all'orologio a luce descritto nella scorsa lezione.

Scegliamo 2 eventi A e B definiti in questo modo: l'evento A è la partenza di un fotone dalla superficie inferiore dell'orologio, l'evento B è il ritorno del fotone alla stessa superficie, dopo aver compiuto un viaggio di andata e ritorno lungo l'orologio (in questa discussione facciamo nuovamente riferimento alla figura 45.3).

Nel riferimento dell'orologio i due eventi hanno distanza spaziale 0, perché il fotone ritorna allo stesso punto da cui è partito. Il tempo che trascorre tra i due eventi è $\Delta t = 2L/c$, quindi abbiamo che

$$s^2 = -c^2\Delta t^2 = -4L^2$$

Nel riferimento del laboratorio, rispetto al quale l'orologio si muove in direzione x con velocità v, abbiamo che:

$$\Delta x' = v\,\Delta t' \quad e \quad \Delta t' = \Delta t/\mathrm{sqrt}(1-v^2/c^2)$$

Otteniamo quindi:

$$s'^2 = \Delta x'^2 - c^2\Delta t'^2 = v^2\frac{\Delta t^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - c^2\frac{\Delta t^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = -c^2\Delta t^2 = s^2$$