

## Lezione 47: la Meccanica Quantistica (parte prima)

## 47.1. Veloce vs lento, piccolo vs grande

Nelle due lezioni precedenti abbiamo imparato i primi rudimenti della relatività ristretta. La conclusione che possiamo trarne ha un'importanza cruciale: quello che vale in un certo ambito, non necessariamente rimane valido in ambiti completamente differenti da quello di partenza. Le leggi che descrivono i moti che avvengono con velocità piccole rispetto a quella della luce non sono capaci di descrivere i moti la cui velocità è comparabile, o addirittura uguale, a quella della luce. Questa scoperta avvenne nel 1905, ad opera, come sappiamo, di Albert Einstein.

Più o meno negli stessi anni una consapevolezza analoga andava maturando: le leggi che descrivono con tanta accuratezza il moto degli oggetti macroscopici, cioè le leggi della dinamica di Newton, smettono di funzionare quando vogliamo descrivere il moto degli oggetti microscopici, come ad esempio molecole, atomi, ioni, o addirittura singole particelle elementari.

Un atomo è un oggetto davvero *molto* piccolo: le sue dimensioni, come abbiamo visto nella lezione 21, sono dell'ordine di  $10^{-10}$  m. Non possiamo pretendere che per descriverlo valgano le stesse leggi che abbiamo messo a punto per descrivere gli oggetti macroscopici. Il modo di pensare abituale, su scale così piccole, semplicemente smette di funzionare.

Abbiamo descritto il moto degli oggetti macroscopici misurando la loro posizione e la loro velocità. Se non ci sono forze la loro velocità rimane costante, e la posizione cambia in modo uniforme al trascorrere del tempo. Se ci sono invece forze, esse producono accelerazioni, quindi la posizione cambia in modo più o meno complicato nel corso del tempo: la traiettoria che il corpo segue è determinata dai campi di forza che esso incontra lungo il suo cammino.

Nel caso di un oggetto microscopico questa descrizione non ha più senso: non possiamo, in qualunque istante assegnato, attribuire una posizione e una velocità all'oggetto osservato. E' un po' quello che accade con le onde: quando un'onda sonora, per esempio, si propaga nell'aria, non possiamo attribuirle una ben precisa posizione nello spazio. Quando un ostacolo viene colpito da un'onda, l'energia che essa trasporta si riversa sull'intera superficie dell'ostacolo, e non accade mai che tutta l'energia si concentri in un singolo punto.

Abbiamo già visto fenomeni in cui l'interpretazione particellare e quella ondulatoria si sono messe in competizione l'una con l'altra: parliamo naturalmente dei fenomeni legati alla natura della luce e alla sua propagazione, così come li abbiamo descritti nelle lezioni 32 e 33.

## 47.2. Onde che si comportano come particelle

Abbiamo visto il dibattito che ha accompagnato lo studio della luce, delle sue proprietà e del modo in cui si propaga. Abbiamo visto come in un primo tempo ebbe il sopravvento l'interpretazione corpuscolare, e come la situazione cambiò drasticamente nei primi anni del diciannovesimo secolo, quando l'esperimento di Young mostrò in modo inequivocabile e definitivo la natura ondulatoria della luce. Solo un'onda, infatti, può produrre l'effetto di interferenza da doppia fenditura così chiaramente rivelato dall'esperimento.

Verso la fine del secolo, tuttavia, nuovi fatti misero in discussione anche questa interpretazione. Diversi esperimenti rivelarono che la superficie di un metallo, esposta a luce di opportuna frequenza, acquista una carica di segno positivo. Ben presto si comprese come ciò fosse dovuto al fatto che il metallo, investito dalla luce, emetteva elettroni: a questo meccanismo venne quindi dato il nome di *effetto fotoelettrico*. Le caratteristiche di questo fenomeno apparvero subito molto strane, perché impossibili da interpretare sulla base del modello ondulatorio. Vediamo le principali:

- L'effetto si manifesta solo quando la frequenza  $f$  della radiazione incidente supera una frequenza di soglia  $f_0$  che dipende dal metallo con il quale si opera
- Il numero di elettroni emesso per unità di tempo è proporzionale all'intensità della radiazione incidente.
- L'energia cinetica massima  $E_{\max}$  degli elettroni emessi è proporzionale alla differenza  $f - f_0$  tra la frequenza  $f$  della luce utilizzata e la frequenza di soglia  $f_0$  per quel materiale:

$$E_{\max} = h \cdot (f - f_0)$$

dove  $h$  è una costante, il cui ordine di grandezza è di  $10^{-34}$  J·s, nota come costante di Planck.

Perché queste caratteristiche apparivano strane? In realtà non vi era nulla di strano nel fatto che l'energia trasportata dall'onda luminosa fosse in grado di strappare elettroni dalla superficie del metallo, e tuttavia i conti non tornavano affatto. Vediamo qualche valore tipico misurato nel corso degli esperimenti:

- la luce capace di strappare elettroni dai metalli ha una frequenza  $f$  il cui ordine di grandezza è  $10^{14}$  Hz e un'intensità  $\Phi$  con ordine di grandezza  $10^1$  W/m<sup>2</sup>,
- gli elettroni emessi hanno un'energia  $E$  il cui ordine di grandezza è di  $10^{-19}$  J
- l'esposizione del metallo alla luce provoca quasi immediatamente l'emissione di elettroni, il tempo di risposta  $\tau$  ha ordine di grandezza  $10^{-8}$  s.

Se gli atomi hanno dimensioni  $r_0 \approx 10^{-10}$  m, allora la superficie di un atomo esposta alla luce è  $S \approx 10^{-20}$  m<sup>2</sup>, e viene quindi investita da una potenza  $P = \Phi \cdot S = 10^1$  W/m<sup>2</sup> · 10<sup>-20</sup> m<sup>2</sup>, quindi  $P \approx 10^{-19}$  W. Nel tempo  $\tau \approx 10^{-8}$  s l'energia che investe l'atomo è perciò:

$$E \approx P \cdot \tau \approx 10^{-19} \text{ W} \cdot 10^{-8} \text{ s} \approx 10^{-27} \text{ J}$$

E' un risultato sconvolgente: l'energia che un elettrone acquista compiendo il salto, è circa 100 milioni di volte più grande rispetto all'energia ricevuta dalla luce che ha investito l'atomo! E' mai possibile che l'energia non si conservi nel caso dell'effetto fotoelettrico? Nessuno prese mai seriamente in considerazione questa possibilità.

La situazione rimase confusa fino al 1905, quando Albert Einstein, ancora lui, formulò un'ipotesi in grado di spiegare i fatti osservati:

- la luce di frequenza  $f$  è fatta di particelle, ciascuna delle quali ha energia  $h \cdot f$ ,
- quando una particella di luce colpisce il metallo, un singolo elettrone ne acquista tutta l'energia, usandone la parte  $h \cdot f_0$  per sfuggire al metallo,
- la parte restante,  $h \cdot (f - f_0)$  può trasformarsi in energia cinetica dell'elettrone.

La teoria di Einstein dell'effetto fotoelettrico, benché perfettamente in accordo con gli esperimenti, era tuttavia difficile da accettare. Di fatto significava un ritorno alla teoria corpuscolare della luce, quando ormai la sua natura ondulatoria era stata confermata da più di un secolo di esperimenti.

### 47.3. Il trionfo dell'evidenza

Ci vollero molti anni perché la teoria di Einstein venisse definitivamente accettata. Una splendida conferma giunse nel 1916, grazie ad un esperimento di Millikan i cui risultati sono illustrati dalla prossima figura (► fig.47.1):

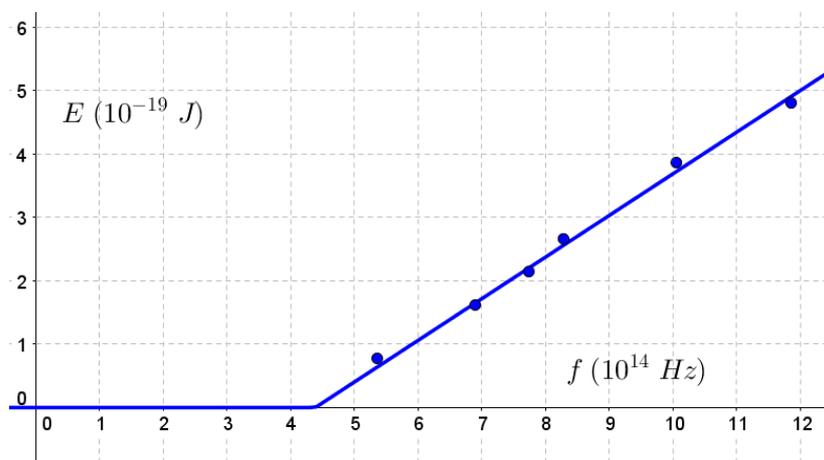


fig.47.1 i risultati di un esperimento di Millikan

In ascissa vediamo la frequenza della luce che viene indirizzata sulla superficie del metallo, in ordinata la massima energia cinetica acquistata dagli elettroni emessi.

Come detto in precedenza, l'emissione non avviene se la frequenza non supera una certa soglia: in questo caso la soglia è  $f_0 \approx 4.4 \cdot 10^{14}$  Hz. Superata tale soglia, gli elettroni possono essere emessi, con energia cinetica tanto più grande quanto maggiore è la differenza  $f - f_0$ . I risultati delle misure si approssimano bene con una retta, la cui pendenza è la costante di Planck. Provate a calcolare la pendenza della retta in figura, e confrontate il risultato con il valore oggi accettato:

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

L'accordo è davvero ottimo: l'accuratezza di questo esperimento contribuì ad assegnare a Millikan il premio Nobel per la fisica nel 1923. Due anni prima il premio era stato assegnato ad Einstein, per la sua analisi teorica dello stesso problema.

#### 47.4. L'amore per la simmetria

Le onde quindi, almeno quelle luminose, presentano un aspetto corpuscolare. La luce, nel colpire l'ostacolo metallico, concentra la sua energia in singoli punti della sua superficie: sono i punti in cui vanno a cadere i fotoni, ciascuno dei quali ha energia pari alla costante di Planck moltiplicata per la frequenza dell'onda, energia che viene trasferita agli elettroni strappati al metallo.

Non sarà per caso vero anche il contrario, e cioè che gli oggetti materiali presentano aspetti ondulatori? Fu questa la domanda che si pose Louis de Broglie, che nella sua tesi di dottorato cercava di ricostruire una perfetta simmetria tra particelle e onde. E' impossibile, così ragionava, considerare una quantità  $E$  di energia isolata, senza associarle una frequenza  $f$  tale che  $E = h \cdot f$ . Se usiamo la lunghezza d'onda la relazione diventa  $E = h \cdot c / \lambda$ , dove  $c$  è la velocità della luce.

Il problema di de Broglie era quindi il seguente: possiamo usare la stessa formula per calcolare la lunghezza d'onda di una particella massiva, per esempio un elettrone? La risposta è no: nella formula  $E = h \cdot c / \lambda$  il termine  $c$  ha perfettamente senso, visto che descrive la velocità con cui si muove il fotone, ma non possiamo applicarla ad elettroni che si muovono con velocità molto più piccole di  $c$ .

Il problema è grave, ma si può risolvere prendendo in considerazione la quantità di moto invece che l'energia. De Broglie, che ben conosceva la dinamica relativistica, sapeva che la quantità di moto di un fotone è  $p = E/c = h/\lambda$ , e questa formula non contiene più la velocità della luce  $c$ . Possiamo quindi sperare di poterla applicare agli elettroni e alle altre particelle materiali. Ecco dunque l'ipotesi di de Broglie, in tutta la sua semplice e visionaria bellezza:

*qualunque particella di massa  $m$ , in moto con velocità  $v$ ,  
ha una lunghezza d'onda  $\lambda = h/p = h/(m \cdot v)$*

Se applichiamo la formula ad un centometrista in gara troviamo un risultato che ci conforta:  $m \approx 10^2 \text{ kg}$ ,  $v \approx 10^1 \text{ m/s}$ , quindi  $\lambda \approx h/(m \cdot v) \approx 10^{-34}/10^3 \approx 10^{-37} \text{ m}$ . E' un risultato così piccolo da farci capire come mai, nel caso la formula fosse vera, nessuno prima se ne fosse reso conto: la lunghezza d'onda di un oggetto macroscopico è così piccola da risultare, a tutti gli effetti, inosservabile.

Ma che cosa succede se il moto che consideriamo è quello di un elettrone accelerato da una differenza di potenziale di 50 V? Per poter usare la formula di de Broglie dobbiamo calcolare l'energia  $E$  acquistata dall'elettrone, quindi la velocità con cui si muove. Vediamo quello che si ottiene:

$$E = q \cdot V = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 50 \text{ V} = 8 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \text{ quindi } v = \sqrt{2E/m} = \sqrt{1.6 \cdot 10^{-17} \text{ J}/9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = 4.2 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

$$\lambda \approx h/(m \cdot v) \approx 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}/(9 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 4.2 \cdot 10^6 \text{ m/s}) = 1.7 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Questo è un risultato incoraggiante: la lunghezza d'onda è ancora molto piccola, ma non così piccola da risultare, a tutti gli effetti, inosservabile. Nella lezione 32, per misurare la lunghezza d'onda della luce rossa del laser ci siamo serviti di un reticolo le cui fenditure distavano circa  $10^{-5} \text{ m}$ . Per misurare la lunghezza d'onda di questi elettroni ci servirebbe un reticolo enormemente più fitto, diciamo con una distanza tra le fenditure dell'ordine di  $10^{-10} \text{ m}$ . Esistono reticoli così fitti? Certamente sì:  $10^{-10}$  metri è proprio il tipico passo del reticolo formato da un cristallo di atomi!

#### 47.5. Una conferma strabiliante

L'ipotesi di de Broglie venne messa alla prova da Davisson e Germer in un celebre esperimento che fu condotto negli anni immediatamente successivi. L'idea di base è descritta nella prossima figura (► fig.47.2):

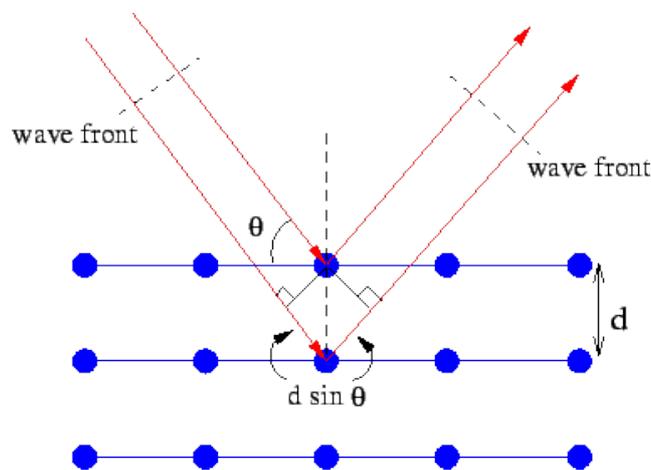


fig.47.2 L'esperimento di Davisson e Germer

Un fascio di elettroni viene inviato contro un cristallo di nickel, dal quale viene riflesso secondo le usuali leggi della riflessione. Alcuni elettroni sono riflessi dallo strato atomico più superficiale, altri da quello immediatamente successivo, posto a una distanza  $d$  dal primo (nel caso del nickel  $d = 2.15 \cdot 10^{-10}$  m). Agli elettroni, accelerati da un potenziale  $V$ , è associata una lunghezza d'onda  $\lambda = h/(m \cdot v)$  tanto più piccola quanto più grande è il potenziale. Il fascio di elettroni riflessi dovrebbe avere intensità massima quando le onde emesse dai due strati sono in fase, cioè quando la direzione  $\theta$  è tale che la differenza di cammino  $2d \sin(\theta)$  è pari a un numero intero di lunghezze d'onda:

$$2d \sin(\theta) = n h / (m \cdot v)$$

I risultati dell'esperimento confermarono in pieno l'ipotesi di de Broglie: agli elettroni, come del resto a tutti gli oggetti materiali, è davvero associata un'onda.

#### 47.6. Oggetti quantistici

Speriamo che la discussione precedente vi abbia convinti: la netta distinzione tra onde e particelle, che con tanta cura avevamo descritto nel delineare il panorama della fisica classica, non esiste nella realtà dei fatti. A livello microscopico le descrizioni classiche, fatte in termini di onde o di particelle, semplicemente perdono di significato. Infatti:

La relazione di Einstein $E = hf$	associa ad un'onda di frequenza $f$ gruppi di energia $E = hf$
La relazione di de Broglie $\lambda = h/(m \cdot v)$	associa a gruppi di massa $m$ con quantità di moto $mv$ un'onda di lunghezza $\lambda = h/(m \cdot v)$

A livello microscopico l'oggetto "onda" e l'oggetto "particella" cessano di esistere in quanto entità separate. Dobbiamo definire in loro vece oggetti di tipo nuovo: gli "oggetti quantistici". Fotoni, atomi di nichel, elettroni sono oggetti quantistici. Il fatto che osservandone il comportamento se ne percepisca l'aspetto corpuscolare, oppure quello ondulatorio, dipende soltanto dalle condizioni in cui vengono osservati. Il settore della fisica che studia il comportamento degli oggetti quantistici si chiama meccanica quantistica.

#### 47.7. Ancora sulla doppia fenditura

Nel 1802, come sappiamo, Thomas Young ottenne una figura di interferenza facendo passare la luce attraverso una doppia fenditura. Nel novembre del 2011 un esperimento del tutto analogo è stato realizzato, al dipartimento di fisica

dell'università di Bologna, utilizzando un fascio di elettroni molto debole. Così debole, in realtà, che un solo elettrone alla volta incontra la fenditura! Il risultato dell'esperimento, del quale potete trovare una descrizione a questo indirizzo

[l-esperimento-piu-bello-della-fisica.bo.imm.cnr.it/attualita/sviluppiattualit.html](http://l-esperimento-piu-bello-della-fisica.bo.imm.cnr.it/attualita/sviluppiattualit.html)

conferma in pieno tutto quello che la meccanica quantistica ha predetto a partire dal 1924, e che possiamo illustrare con l'aiuto della prossima figura (► fig.47.3):

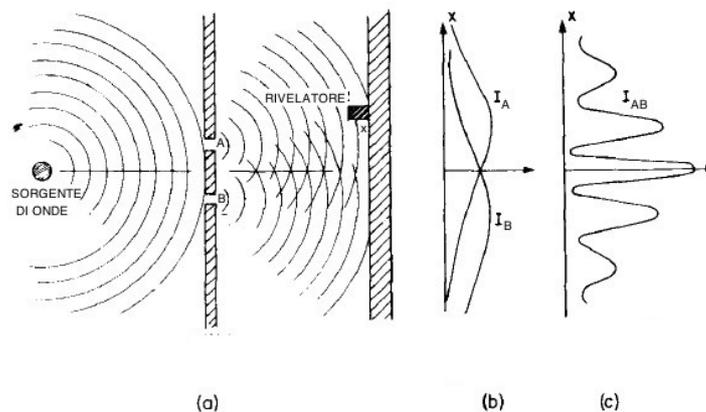


fig.47.3 L'interferenza di elettroni creata da una doppia fenditura

La sorgente di elettroni è rappresentata per ciò che realmente è: una sorgente di onde. Nella parte a) della figura vediamo la fenditura operare lo sdoppiamento dell'onda, che crea il fenomeno di interferenza sullo schermo. Un rivelatore di elettroni posto sullo schermo ha un'alta probabilità di registrare l'arrivo della particella (ricordiamo che gli elettroni viaggiano uno alla volta) se si trova in un punto in cui l'interferenza è costruttiva. Il rivelatore, viceversa, rimane muto se lo piazziamo in un punto in cui l'interferenza è distruttiva.

La parte b) della figura mostra quello che accade se apriamo la sola fenditura A: la probabilità  $I_A$  che il rivelatore registri l'arrivo dell'elettrone è alta nel punto  $x$  dello schermo allineato con la sorgente e la fenditura aperta, e cala a mano a mano che lo si allontana da questo punto. Un discorso analogo vale se si apre la sola fenditura B.

Nella parte c) della figura vediamo quel che accade quando entrambe le fenditure sono aperte. Si tratta della stessa figura di interferenza che osserviamo quando la doppia fenditura è attraversata dalla luce. Il modo in cui la figura si forma è descritto dalla prossima immagine (► fig.47.4), che riporta i dati di un esperimento simile a quello di Bologna. Gli elettroni, come vere particelle, arrivano ad uno ad uno sullo schermo. Nella parte b) della figura vediamo come si distribuiscono gli arrivi dei primi 100 elettroni: le loro posizioni appaiono del tutto casuali, senza che nessuno schema appaia alla vista. Poi, a mano a mano che il numero di arrivi cresce, lo schema emerge evidente.

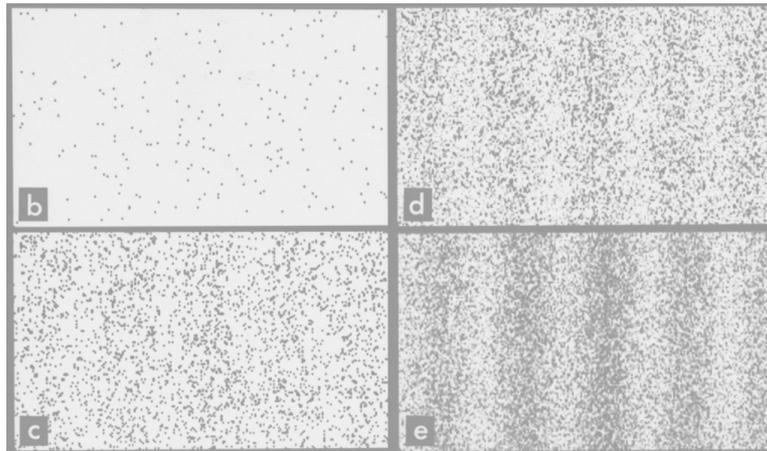


figura 47.4 Come emerge lo schema della frange di interferenza dopo un certo numero di arrivi: 100 (b), 3000 (c), 20000 (d), 70000 (e).

Nelle parti c), d), e) della figura vediamo la situazione dopo 3000, 20000 e 70000 arrivi rispettivamente. Emerge con chiarezza uno schema che ben conosciamo: quello relativo alle frange di interferenza di un'onda che esce da una doppia fenditura. La probabilità di arrivo degli elettroni è grande dove l'interferenza è costruttiva, nulla dove è distruttiva.