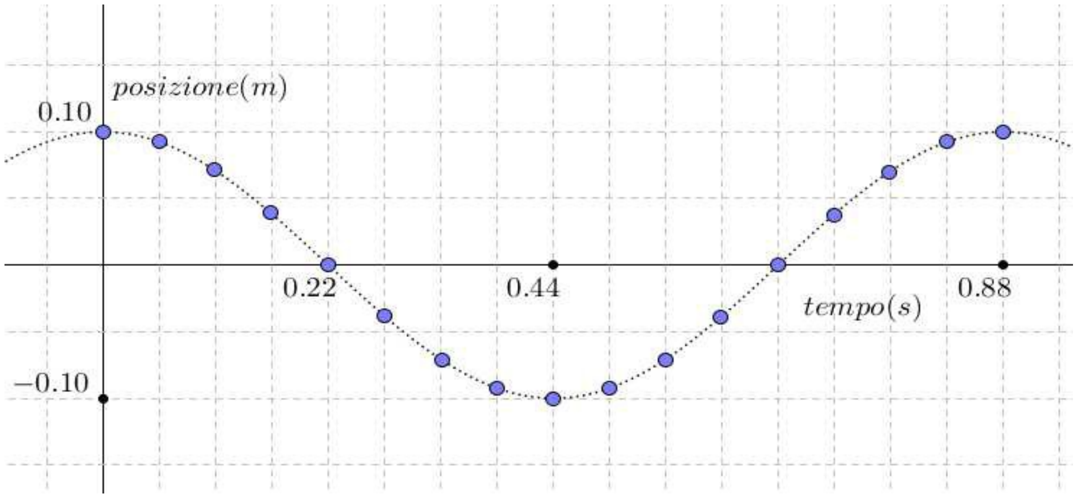
Esercizi sulle lezioni 29 - 33

1. Una molla si allunga di 5.2 cm quando le si applica una forza di 0.83 N. (a) Qual è la costante elastica di questa molla? (b) Quanto si allunga se le applichiamo una forza di 1.3 N? (c) Quanta energia immagazzina quando viene compressa da una forza di 0.77 N? (d) Di quanto dovremmo comprimerla per immagazzinare un'energia di 1 J?

Un carrellino di massa 500 g è collegato ad una molla, e oscilla in modo tale che la posizione varia nel tempo come descritto dalla prossima figura.

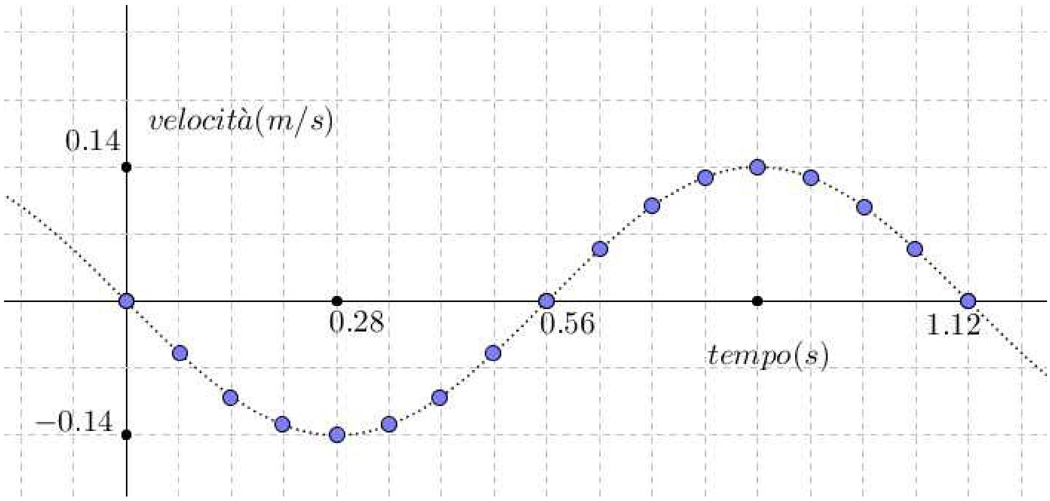


2. Calcola ampiezza, periodo, frequenza e pulsazione di questo moto.
3. Descrivi come varia nel tempo la posizione x, usando un'opportuna funzione sinusoidale del tipo $x(t) = A\cdot\cos(\omega t)$.
4. Per calcolare la velocità, cioè la funzione v(t), basta derivare rispetto al tempo la funzione posizione x(t):

$$v(t) = D_t x(t) = D_t[A\cdot\cos(\omega t)]$$

Come è fatta la funzione v(t)?
5. La velocità massima v_M viene raggiunta quando il carrellino passa per la posizione di equilibrio. Usa la funzione trovata al punto precedente per calcolare il valore di v_M.
6. Il valore massimo della velocità, almeno in modo approssimato, si poteva calcolare a partire dal grafico della posizione. Come? Che risultato si ottiene in questo modo?
7. Qual è l'energia cinetica massima che il carrellino possiede nel corso del suo moto? In quali istanti tale energia ha il valore massimo? Quando invece si annulla?
8. Tenuto conto che l'energia meccanica si conserva (trascurando gli attriti), l'energia potenziale elastica massima deve eguagliare quella cinetica massima: $\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_M^2$. Tenendo conto di ciò, calcola la costante elastica della molla usata.

Ora mostriamo una situazione analoga alla precedente: questa volta, però, abbiamo il grafico della velocità con cui il carrellino si muove istante per istante.



9. Calcola periodo, frequenza e pulsazione di questo moto.
10. Descrivi come varia nel tempo la velocità v, usando un'opportuna funzione sinusoidale del tipo $v(t) = -v_M \cdot \sin(\omega t)$.
11. Per calcolare la posizione, cioè la funzione x(t), basta antiderivare rispetto al tempo la funzione posizione v(t), cioè trovare una funzione la cui derivata coincida con la funzione trovata al punto precedente. Come è fatta la funzione x(t)?
12. La massima distanza A tra il carrellino e la posizione di equilibrio viene raggiunta negli istanti in cui la sua velocità diventa zero. Calcola quindi l'ampiezza A.
13. Di quanto si sposta il carrello nel corso del primo mezzo periodo? Per rispondere in modo approssimato sappiamo che basta calcolare l'area sotto al grafico della velocità. Fate attenzione che parliamo di aree orientate: l'area, in questo caso, è sotto all'asse delle ascisse. Per esempio possiamo calcolare l'area corrispondente al primo quarto di periodo usando 4 trapezi. Nel secondo quarto di periodo l'area è la stessa, per ragioni di simmetria.
14. Alla stessa domanda del punto precedente possiamo rispondere in modo esatto, usando la formula fondamentale del calcolo. Che risultato si ottiene?
15. Qual è l'energia cinetica massima che il carrellino possiede nel corso del suo moto? In quali istanti tale energia ha il valore massimo? Quando invece si annulla?
16. Tenuto conto che l'energia meccanica si conserva (trascurando gli attriti), l'energia potenziale elastica massima deve eguagliare quella cinetica massima: $\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_M^2$. Tenendo conto di ciò, calcola la costante elastica della molla usata.

17. Nel corso della lezione 29 abbiamo spiegato che il periodo dell'oscillazione è

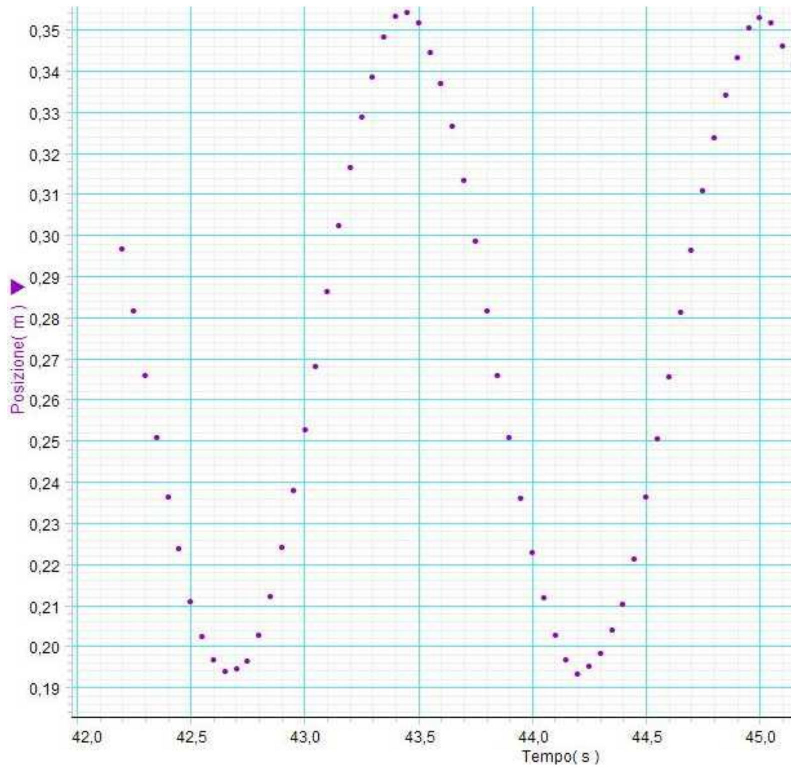
$$T = 2\pi\sqrt{(m/k)}$$

Usate questa formula per calcolare la costante elastica delle due molle usate negli esercizi da 2 a 16.

Ora analizziamo una situazione reale. In laboratorio abbiamo scelto una molla, l'abbiamo appesa ad un supporto, quindi ne abbiamo misurato la lunghezza, ovvero la distanza tra la prima e l'ultima spira. Abbiamo trovato Li = 111 mm. Poi abbiamo preso un piccolo oggetto metallico e ne abbiamo misurato la massa: m(oggetto) = 411 g.

Abbiamo quindi appeso l'oggetto alla molla: essa si è allungata, raggiungendo la lunghezza Lf = 680 mm. Le molle dei libri di testo sono molle ideali, cioè prive di massa. Le molle fatte di autentico acciaio hanno una massa che nel nostro caso non è proprio trascurabile: m(molla) = 53 g.

Poi abbiamo posizionato il sonar sotto all'oggetto metallico sospeso alla molla. Tirato l'oggetto verso il basso e lasciatolo andare, si è dato inizio a un moto di cui si mostra la registrazione fatta dal sonar.



Ecco le domande alle quali occorre rispondere:

18. Qual è l'intensità della forza che abbiamo applicato alla molla provocandone l'allungamento?
19. Che allungamento ha subito la molla, a causa della forza applicata?
20. Qual è la costante elastica della molla che abbiamo scelto?
21. Di quanto abbiamo poi allungato la molla, per mettere in moto l'oggetto metallico?
22. A quale frequenza di acquisizione funzionava il sonar?
23. Che tipo di moto si è osservato?
24. Qual è la frequenza delle oscillazioni?
25. Qual è la loro ampiezza?
26. Qual è il periodo del moto?
27. Qual è la sua pulsazione?
28. A che velocità si muove l'oggetto metallico nel momento in cui raggiunge i punti estremi della sua traiettoria?
29. A che velocità si muove l'oggetto metallico quando passa per il punto medio della sua traiettoria?
30. Qual è la forza di richiamo verso l'alto che la molla applica sull'oggetto metallico

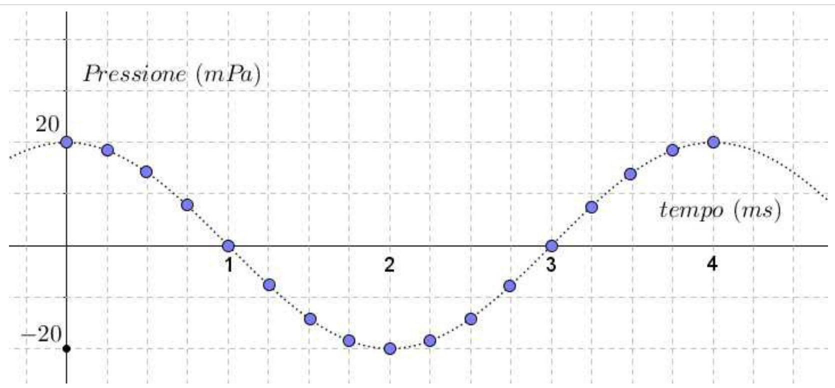
quando esso si trova nel punto più basso della sua traiettoria?
31. Qual è l'accelerazione che questa forza provoca sul corpo metallico?

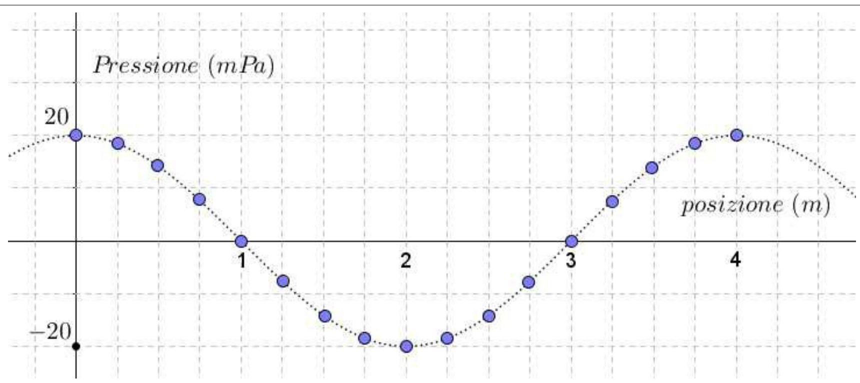
La teoria prevede che il periodo del moto dipenda solo dalla massa dell'oggetto che oscilla e dalla costante elastica della molla, secondo la formula: T = 2*pi*sqrt(m/k).

32. Qual è il periodo previsto dalla teoria?
33. Ci sono discrepanze rispetto a quello realmente osservato?
34. Quanto è grande, in percentuale, la discrepanza eventualmente osservata?
35. Quali possono essere le ragioni della discrepanza? Attenti a quello che dite e ricordatevi di Galileo: i fenomeni di attrito possono ridurre l'ampiezza delle oscillazioni, non la loro durata!
36. Vi sarete accorti, certamente, che le cose vanno *come se* l'oggetto appeso alla molla avesse una massa maggiore di 411 g. Le cose stanno proprio così: non è solo l'oggetto ad oscillare, ma anche la molla che lo sostiene. Dovremo perciò tenere conto anche della massa della molla. Il problema è che le parti dell'oggetto appeso si muovono tutte alla stessa velocità, mentre le spire della molla si muovono a velocità diverse: più lente quelle vicine al supporto, più veloci quelle più distanti. Facendo un opportuno integrale si trova che la massa efficace della molla, cioè la massa che dobbiamo aggiungere a quella dell'oggetto, è pari a 1/3 della massa m della molla. Detto questo, calcolate il periodo di oscillazione che si dovrebbe osservare, e confrontatelo con quello che abbiamo osservato.

——————

La prossime 2 immagini descrivono un'onda sonora che si propaga nello spazio.





37. Calcolate l'ampiezza A dell'onda, il periodo T, la frequenza f, la pulsazione ω, la lunghezza d'onda λ, la velocità di propagazione v.

38. La luce è fatta di onde elettromagnetiche che viaggiano nel vuoto alla velocità di $3{\cdot}10^8$ m/s. Lo spettro visibile si estende su un intervallo di lunghezze d'onda che va da circa 400 nm fino a circa 700 nm. Qual è il corrispondente intervallo per le frequenze?

39. Stando in barca vediamo passare un'onda marina le cui creste, distanti l'una dall'altra circa 12 m, si susseguono ogni 7 secondi circa. Qual è la velocità con cui l'onda si propaga?

40. Un esercizio del tutto analogo a quello che conclude l'approfondimento della lezione 30. Un'onda sonora è descritta dalla seguente equazione:

$$y(x,t) = 0.02\ \mathrm{Pa} \cdot \cos\,(2\,\mathrm{m}^{-1} \cdot x + 700\ \mathrm{s}^{-1} \cdot t)\,.$$

Calcolate:

(a) l'ampiezza dell'onda;
(b) il numero d'onda;
(c) la pulsazione;
(d) la lunghezza d'onda;
(e) il periodo;
(f) la frequenza;
(g) la velocità di propagazione;
(h) la direzione di propagazione.

Inoltre:

(i) fate uno schizzo accurato del profilo dell'onda all'istante t = 0;
(j) fate uno schizzo accurato del profilo dell'onda all'istante t = 1 s.

41. Due onde interferiscono in un punto P, entrambe hanno lunghezza d'onda di 12 cm. Sono state emesse, in fase, da due sorgenti vicine, e per arrivare in P hanno percorso due cammini di lunghezza differente: la differenza di cammino è di 6 cm. L'interferenza in P sarà costruttiva o distruttiva? Perché?

42. Due onde in fase, con lunghezza d'onda di 10 cm, sono emesse da 2 sorgenti che distano 2 cm tra di loro. Quanto distano, approssimativamente, i massimi della figura di interferenza che si forma su uno schermo posto a 3 m di distanza?

---

43. Si definisce *pressione sonora* la variazione localmente prodotta dall'onda sonora rispetto alla pressione media del mezzo in cui l'onda si propaga. Il livello L_p di pressione sonora si misura in modo logaritmico:

$$L_p \;=\; 20\log_{10}\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

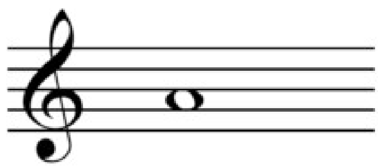
Nell'equazione precedente il termine p rappresenta la media quadratica dei valori della pressione: nel caso di un'onda sinusoidale p è il valore di picco (cioè l'ampiezza dell'onda) diviso $\sqrt{2}$. Il termine p_0 è un valore di pressione sonora scelto come riferimento: di solito si pone $p_0 = 20\ \mu Pa$. L'unità di misura in cui si esprime il valore di pressione sonora si chiama decibel (dB). Calcolate quindi, in base alle precedenti informazioni, il livello di pressione sonora in dB dell'onda dell'esercizio 37.

44. La prossima tabella indica il livello di pressione sonora associato ad alcune sorgenti di rumore:

Motore di un jet a 30 m	150 dB
Colpo di fucile a 1 m	140 dB
Soglia del dolore	130 dB
Danneggiamento dell'udito per esposizione a breve termine	circa 120 dB
Motore di un jet a 100 m	110-140 dB
Martello pneumatico a 1 m; discoteca	circa 100 dB
Danneggiamento dell'udito per esposizione a lungo termine	circa 85 dB
Traffico intenso a 10 m	80-90 dB
Treno passeggeri in movimento a 10 m	60-80 dB
Ufficio rumoroso; TV a 3 m (volume moderato)	circa 60 dB
Conversazione normale a 1 m	40-60 dB
Stanza silenziosa	20-30 dB
Stormire di foglie, respiro umano rilassato a 3 m	10 dB

(a) Qual è il livello di pressione sonora che l'orecchio deve sopportare durante una serata in discoteca? (b) Una pressione sonora di 1 Pa (in media quadratica) a quale livello corrisponde?

45. La figura qui a fianco mostra la nota La4 sul pentagramma. La frequenza di questa nota è fissata a 440 Hz. Qual è il suo periodo? Sapendo che il suono si propaga nell'aria a una velocità di 343 m/s, qual è la lunghezza d'onda corrispondente?



46. Nella lezione 31 abbiamo descritto come si forma un'onda stazionaria su una corda. Abbiamo anche visto un'immagine dinamica tratta dal sito "fisica onde e musica". Ora vogliamo realizzare la stessa immagine con GeoGebra, aggiungendo i dettagli che il programma ci mette a disposizione.

Per quest'attività abbiamo bisogno di creare tre slider, cioè tre parametri regolabili con un cursore. Chiamiamoli t, k e omega: rappresenteranno rispettivamente il tempo che scorre, il numero d'onda, la pulsazione. L'intervallo di variazione, per k e per omega, lo poniamo pari a (0,5). Per il parametro t scegliamo un intervallo più lungo, diciamo (0,100), poi, nella sezione animazione, scegliamo una velocità 0.1 con andamento crescente. Il valore migliore di velocità va scelto in base alla velocità del processore con cui state lavorando: potete ridurlo se l'animazione risulterà troppo veloce, altrimenti vi conviene aumentarlo.

Ora definiamo tre funzioni: f(x)=cos(k*x-omega*t), g(x)=cos(k*x+omega*t), f(x)+g(x). Nella linguetta relativa alle proprietà generali dello slider t scegliamo di rendere attiva l'animazione. Osservate attentamente quello che accade e rispondete alle domande che seguono:

(a) qual è il comportamento dinamico dei grafici delle funzioni f e g?
(b) Come possiamo spiegare il loro comportamento sulla base di quel che abbiamo descritto nell'approfondimento della lezione 30?
(c) Con quale velocità si propagano i due grafici? Attenzione: stiamo parlando della velocità "matematica". Quella che si vede sullo schermo, misurata in cm di schermo percorsi ogni secondo, dipende dal processore e non dalle equazioni.
(d) Come si comporta il grafico della somma f+g? In quale direzione e con quale velocità si propaga?
(e) Quanto osservato al punto precedente concorda con quel che abbiamo studiato nella lezione 31?

Ora nascondi (senza cancellarli!) i grafici di g e della somma: in questo modo potrai concentrare l'attenzione sul grafico di f.

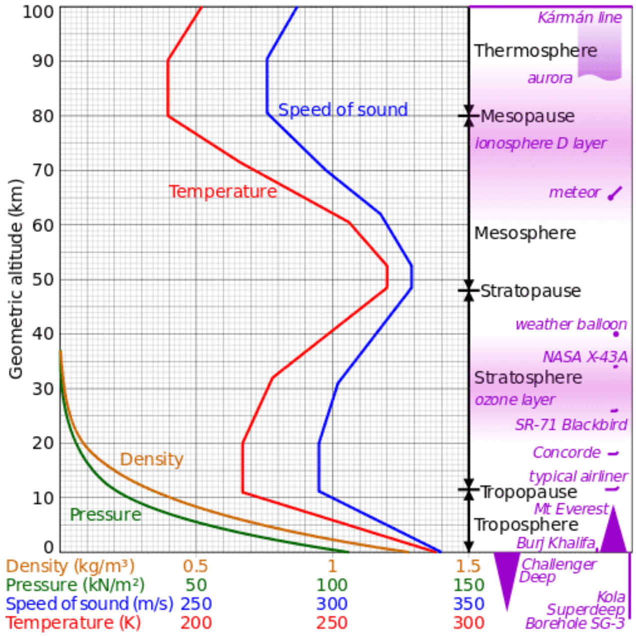
(f) Che cosa succede se cambiamo il valore di omega lasciando fisso quello di k? Sai spiegare il significato fisico del comportamento che si osserva?
(g) Che cosa succede se cambiamo il valore di k lasciando fisso quello di omega? Sai spiegare il significato fisico del comportamento che si osserva?

Per finire nascondi i grafici di f e di g, per poter concentrare l'attenzione sul grafico della funzione somma.

(h) Che cosa succede se cambiamo il valore di k lasciando fisso quello di omega (e viceversa)? Sai spiegare il significato fisico del comportamento che si osserva?

47. Parliamo ora della velocità con cui il suono si propaga nell'aria che costituisce l'atmosfera del nostro pianeta. Per farlo consideriamo il grafico che segue, nel quale si mostra come, al variare dell'altitudine, cambiano le caratteristiche dell'atmosfera: densità, pressione, temperatura, velocità di propagazione del suono. Occorre innanzitutto saper leggere il grafico:
(a) qual è la pressione dell'aria al livello del mare, a 5 km di altitudine, a 10 e a 20 km?
(b) qual è la densità dell'aria al livello del mare, a 5 km di altitudine, a 10 e a 20 km?
(c) qual è la temperatura dell'aria al livello del mare, a 10 km di altitudine, a 50 e a 100 km?

(d) qual è la velocità del suono al livello del mare, a 10 km di altitudine, a 50 e a 100 km?



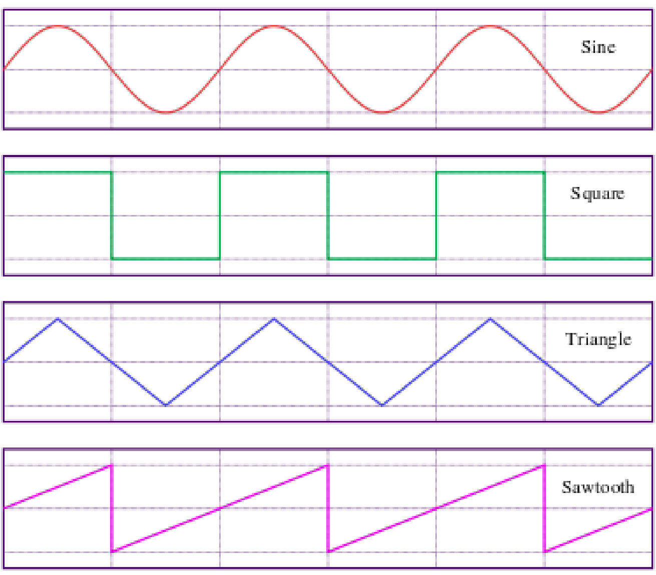
Il confronto dei grafici mostra in modo chiarissimo che la velocità del suono dipende solo dalla temperatura dell'aria, non dalla sua pressione o dalla sua densità.

Un'analisi accurata dei dati mostra che la velocità del suono è proporzionale alla radice quadrata della temperatura:

$$v = k \cdot \mathrm{sqrt}(T)$$

(e) usa i dati forniti dal grafico per stimare il valore della costante di proporzionalità k.

48. Nella lezione 31 abbiamo descritto come, sommando funzioni sinusoidali di frequenza via via crescente, si possa ricostruire una qualunque forma d'onda periodica. Due forme d'onda importanti nelle applicazioni di tipo elettronico sono l'onda quadra e l'onda triangolare. Vediamo la prossima figura per capire come sono fatte:



L'ultima forma si chiama "dente di sega".
Tutte queste funzioni sono dispari, nel senso che

$$f(-x)=-f(x)$$

I loro grafici risultano quindi simmetrici rispetto all'origine.

Il grafico del coseno, invece, è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, e la funzione cos è pari: $\cos(-x) = \cos(x)$

Perciò l'onda quadra e quella triangolare si ottengono sommando armoniche della sola funzione seno

L'analisi di Fourier insegna quali ampiezze occorre dare alle successive armoniche per ottenere il segnale che vogliamo riprodurre.

Per l'onda quadra: $q(x) = [\sin(x)+\sin(3x)/3+\sin(5x)/5+\sin(7x)/7+\ldots]*4/\pi$

Per l'onda triangolare: $t(x) = [\sin(x)-\sin(3x)/3^2+\sin(5x)/5^2-\sin(7x)/7^2+\ldots]*8/\pi^2$

Dimostrare le equazioni precedenti è un problema di matematica piuttosto difficile. Il vostro compito, più semplicemente, consiste nel costruire un foglio di lavoro con GeoGebra in cui sia evidente l'effetto che si ottiene sommando le armoniche di frequenza via via sempre più alta, ciascuna con la giusta ampiezza.
Per esempio potete cominciare definendo le armoniche necessarie:

a1(x) = sin(x),   a3(x) = sin(3x),   a5(x) = sin(5x),   ...

Poi potete costruire un passo alla volta l'onda quadra:

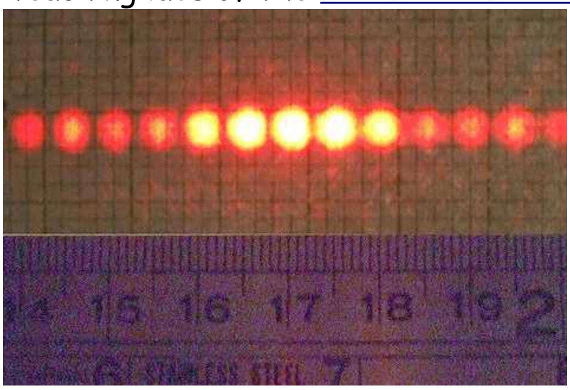
q1 = a1,   q3 = q1+a3/3,   q5 = q3+a5/5,   ...

Infine l'onda triangolare:

t1 = a1,   t3 = t1-a3/9,   t5 = t3+a5/25,   ...

---

49. La prossima immagine è tratta da Wikipedia. Le note che la accompagnano dicono testualmente: "A diffraction pattern of a 633 nm laser with 1mW power through a grid of 150 slits, 0.0625 mm each, 0.25 mm separations between their centers. This picture was taken in the teaching labs of the Ben Gurion University Physics Department".



Le note si dimenticano di citare un dato importante: la distanza D che separa il reticolo dallo schermo sul quale si forma l'immagine che vediamo. Sapreste valutare questa distanza, prendendo per buone le note citate, e misurando la distanza tra i massimi con il righello che vedete riprodotto?

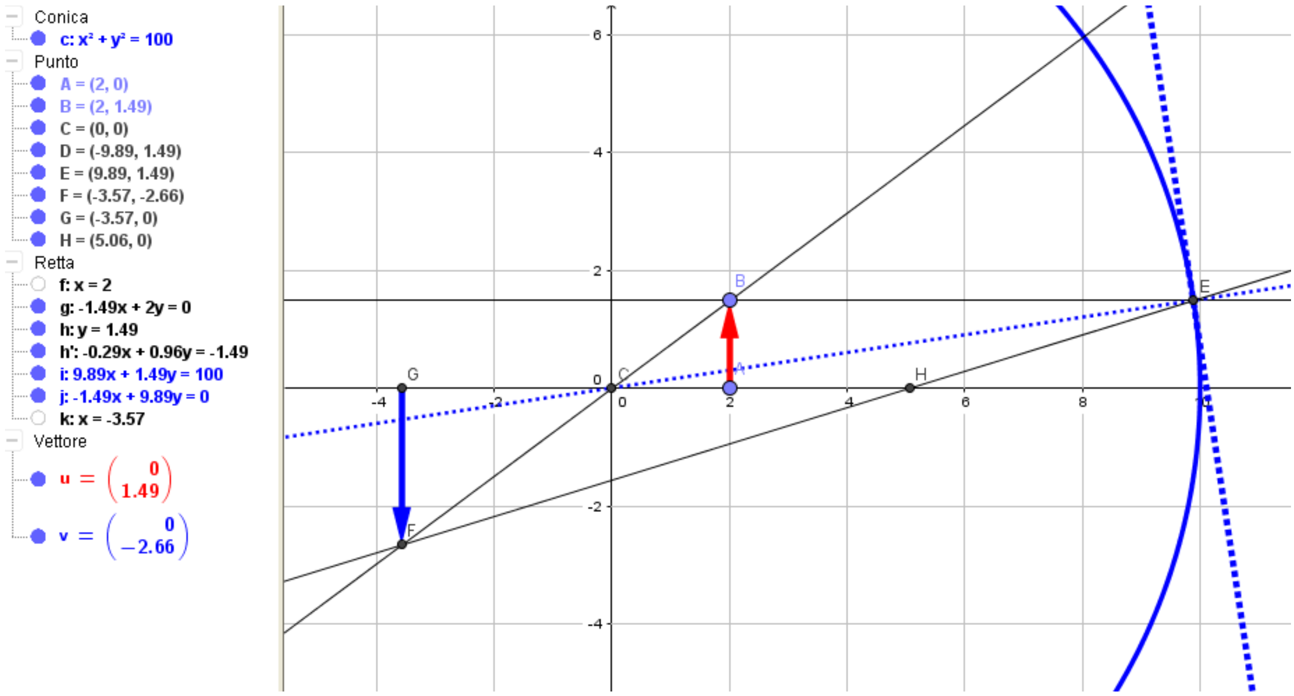
50. La luce laser dell'esercizio precedente ha una lunghezza d'onda di 633 nm. Tenuto conto che l'onda si propaga alla velocità $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, quali sono il suo periodo e la sua frequenza? Usate poi la tabella 32.1 per stabilire se il colore dell'immagine è reso in modo realistico oppure no.

---

51. Un raggio di luce (cioè un lungo pacchetto di fotoni) viaggia in direzione 0°. Incontra uno specchio posto in direzione 32°. Qual è la direzione della normale allo specchio? In che direzione viaggia il raggio riflesso dallo specchio? Fate uno schizzo accurato della situazione.

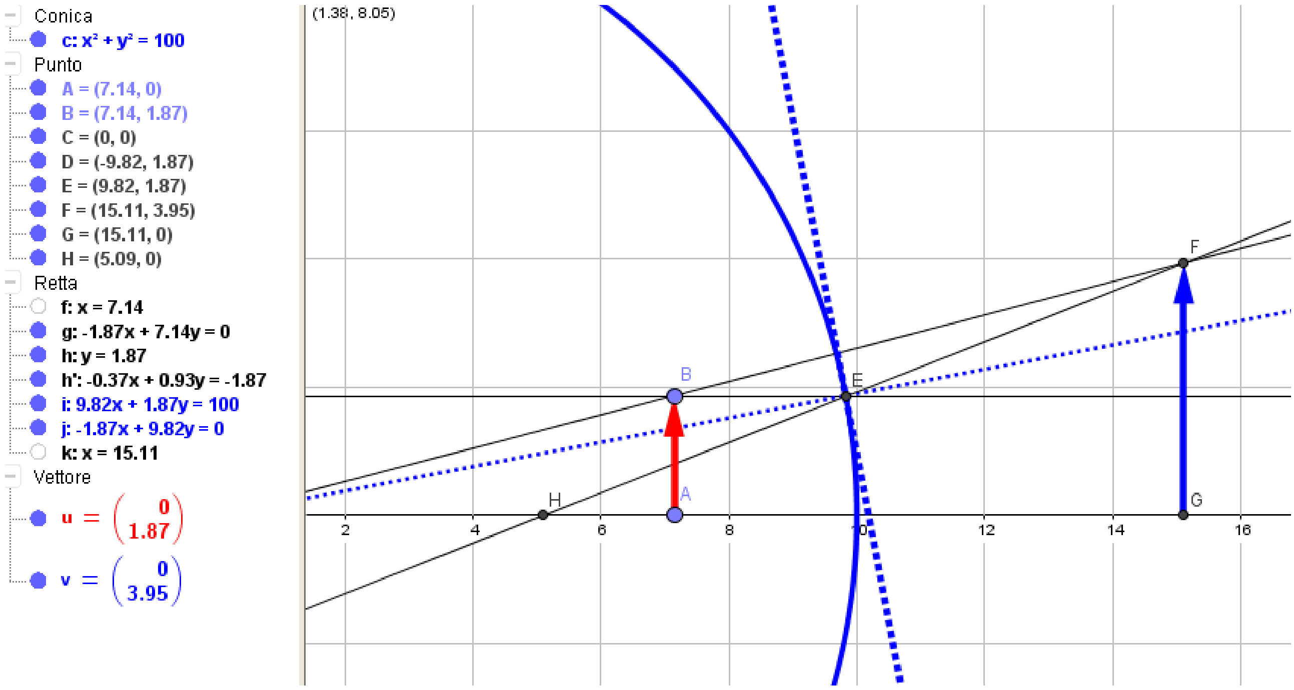
52. Parliamo della parte b) della figura 33.3. Cercate di misurare con la massima precisione possibile l'angolo di incidenza i e l'angolo di rifrazione r. Se il raggio incidente viaggia in aria, mezzo in cui la velocità della luce è circa uguale alla velocità nel vuoto, qual è la velocità della luce nel vetro?

53. Costruiamo uno specchio sferico con GeoGebra. Le immagini che seguono riportano anche il contenuto della finestra algebrica, che potete usare per rispondere alle varie domande. Nel corso della lezione 33 abbiamo visto che:
- la distanza focale, per piccole dimensioni dell'oggetto, è circa uguale alla metà del raggio dello specchio,
- il rapporto tra le dimensioni di oggetto e immagine è circa uguale alle rispettive distanze dallo specchio,
- è quasi vera l'equazione dei punti coniugati: $1/p + 1/q = 1/f$

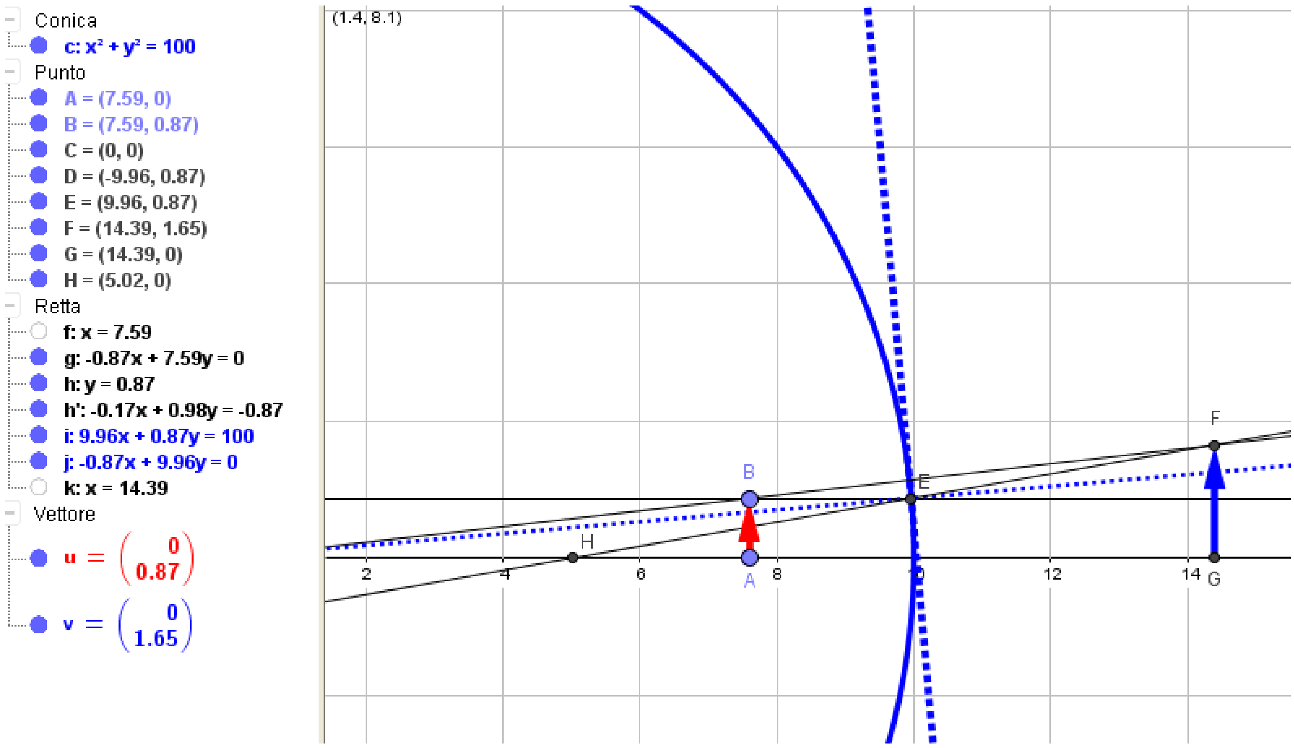


Usando le informazioni tratte dalla figura precedente:
a) stabilite la posizione p dell'oggetto e la posizione q dell'immagine,
b) stabilite le dimensioni dell'oggetto e dell'immagine,
c) verificate se dimensioni e distanze dal vertice dello specchio sono proporzionali,
d) verificate se il rapporto tra le dimensioni è circa uguale al rapporto tra p-f e f,
e) verificate che sia quasi vera l'equazione dei punti coniugati.

54. Le domande sono le stesse dell'esercizio precedente, riferite alla situazione descritta nella prossima figura. Nel verificare l'equazione dei punti coniugati bisogna fare attenzione ai segni, dato che l'immagine è virtuale.



55. Stesse domande viste nei due problemi precedenti. Questa volta l'oggetto è più piccolo, quindi le approssimazioni dovrebbero essere migliori. E' davvero così?



56. A spherical mirror has a focal length of 10.0 cm.
a) Locate and describe the image for an object distance of 25.0 cm.
b) Locate and describe the image for an object distance of 10.0 cm.
c) Locate and describe the image for an object distance of 5.00 cm.

57. Maria looks at her image in a makeup mirror. It is enlarged when she is close to the mirror. As she backs away, the image becomes larger, then impossible to identify

when she is 30.0 cm from the mirror, then upside down when she is beyond 30.0 cm, and finally small, clear, and upside down when she is much farther from the mirror.
a) Is the mirror convex, plane, or concave?
b) Which is the magnitude of its focal length?

58. An object is placed 50.0 cm from a concave spherical mirror with focal length of magnitude 20.0 cm.
(a) Find the location of the image. (b) What is the magnification of the image? (c) Is the image real or virtual? (d) Is the image upright or inverted?

59. A converging lens has a focal length of 10.0 cm.
a) An object is placed 30.0 cm from the lens. Construct a ray diagram, find the image distance, and describe the image.
b) An object is placed 10.0 cm from the lens. Find the image distance and describe the image.
c) An object is placed 5.00 cm from the lens. Construct a ray diagram, find the image distance, and describe the image.

60. A diverging lens has a focal length of 10.0 cm.
a) An object is placed 30.0 cm from the lens. Construct a ray diagram, find the image distance, and describe the image.
b) An object is placed 10.0 cm from the lens. Construct a ray diagram, find the image distance, and describe the image.
c) An object is placed 5.00 cm from the lens. Construct a ray diagram, find the image distance, and describe the image.